

Algebra und Zahlentheorie.

Colucci, Antonio: Sopra i polinomi definiti. *Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Mem.* **20**, 14 S. (1934).

Verf. unternimmt eine systematische Übersicht der Eigenschaften definiter Polynome, d. h. Polynome, die für reelle Werte des Argumentes ihr Vorzeichen nicht wechseln. Er leitet u. a. folgende Sätze her: Damit $f(x)$ definit sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Werte von $f(x)$ für alle reellen Nullstellen von $f'(x)$ von demselben Vorzeichen sind. Ist Δ die Diskriminante von $f(x)$, so folgt daraus ein hinreichendes Kriterium: $\frac{\partial \Delta}{\partial a_n} \geq 0$, $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_n^2} \geq 0$, ..., $\frac{\partial^{n-1} \Delta}{\partial a_n^{n-1}} \geq 0$. — Aus der Darstellbarkeit von definiten Polynomen $f(x)$ als Produkt von konjugiert-imaginären Polynomen folgt die parametrische Darstellung ihrer Koeffizienten. — Verf. gibt zwei Methoden der Darstellung der definiten Polynome als Summe von Quadraten. Bemerkenswert ist folgende Methode: Ist $f(\alpha_1) = \delta_0 \geq 0$ das kleinste Minimum von $f(x)$, so gilt: $f(x) = g_1(x)(x - \alpha_1)^2 + \delta_0$, wobei $g_1(x)$ wieder ein definites Polynom ist und darum eine ähnliche Darstellung zuläßt. Die Fortsetzung des Verfahrens führt zum Ziel. — Verf. nennt die Matrizen $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ symmetrisch bzw. schief. Die Determinanten von symmetrischen bzw. schiefen Matrizen sind als Differenzen bzw. Summen von Quadraten darstellbar. Indem der Verf. vom speziellen Polynom $y^{2m} - 1 = 0$ ausgeht, beweist er, daß jedes definite Polynom eine Darstellung als schiefe Determinante zuläßt. — Jedes Polynom kann als Differenz zweier Polynome vom Grade $\leq n + 2$ dargestellt werden. — Zum Schluß gibt der Verf. mehrere Bildungsweisen von definiten Polynomen als Lösungen linearer Differentialgleichungen und als bestimmte

Integrale $\int_a^b f(x + \xi) \omega(\xi) d\xi$ an, wobei $f(x)$ definit und $\omega(\xi) \geq 0$ ist.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Birkhoff, Garrett: Ideals in algebraic rings. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **20**, 571—573 (1934).

Voranzeige der folgenden Sätze: Es sei R ein Ring, der aus den ganzen rationalen Zahlen durch Adjunktion einer ganzen algebraischen Zahl a entsteht, die Nullstelle des ganzzahligen, irreduziblen Polynoms $f(x)$ ist. Weiter sei $L(R)$ das System der Ideale $\neq 0$ aus R und $L_p(R)$ das Teilsystem von $L(R)$, das alle Ideale enthält, deren Norm eine Potenz der Primzahl p ist. Dann ist $L(R)$ hinsichtlich der Operationen: gr. g. T., kl. gem. V., Produkt und Idealquotient direktes Produkt der $L_p(R)$ im Sinne von G. Birkhoff [*Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, 728—745 (1933); vgl. dies. Zbl. **8**, 2 (Ore) u. **9**, 394 (Birkhoff)]. Sind $A < B$ und $A^* < B$ drei verschiedene Ideale, und sind die Additionsgruppen von B/A und B/A^* operatorisomorph bezüglich der Zahlen aus R als Operatoren, so gibt es ein Ideal C mit $(\bar{C}, A) = (C, A^*) = (B, [C, A]) = [C, A^*] = [A^*]$ — Weiter sind die folgenden vier Aussagen äquivalent: a) Irgenddreie Ideale aus R erfüllen $[(A, B), (A, C)] = (A, [B, C])$. b) Wenn $A < B$, dann ist $A : (A : B) = B$, d. h. R ist regulär im Sinne von W. Gröbner [*Math. Ann.* **110**, 197 (1934); dies. Zbl. **9**, 290]. c) Jedes $L_p(R)$ ist isomorph hinsichtlich der Operationen gr. g. T., kl. g. V., Multiplikation und Idealquotientenbildung zu dem System aller Produkte einer Menge gewöhnlicher Primzahlen. d) Wenn $g(x) \bmod p$ ein irreduzibler Teiler von $f(x)$ ist, und wenn überdies $g^2(x) \bmod p$ ein Teiler von $f(x)$ ist, so ist $pR < (g(a)R, p^2R)$.

Reinhold Baer (Manchester).

Akizuki, Yasuo, und Yoshirō Mori: Ideale in quadratischen Zahlringen. Jap. J. Math. 11, 35—57 (1934).

Durch Verbindung der für die allgemeinen Ordnungen \mathfrak{o} algebraischer Zahlkörper gültigen Idealtheorie, wie sie von Dedekind, E. Noether und Masazo Sono entwickelt wurde, der von Dedekind und dem Ref. gegebenen Theorie der zum Führer teilerfremden Ideale sowie der Theorie der umkehrbaren Moduln, die von Dedekind für den Spezialfall der quadratischen Körper schon weitgehend durchgebildet war, werden neue, zum Teil sehr eingehende idealtheoretische Sätze gewonnen. Das Hauptresultat des 1. Teiles besteht in dem Satz, daß jedes in \mathfrak{o} gelegene und \mathfrak{o} als zugehörige Ordnung besitzende Primärideal \mathfrak{q} mit \mathfrak{p} als zugehörigem Primideal irreduzibel ist, $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ als einziges zu \mathfrak{p} gehöriges unmittelbares Vielfache und $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ als einzigen unmittelbaren Teiler besitzt. Diese Aussage gilt übrigens allgemein für Ordnungen \mathfrak{o} mit umkehrbarem Komplement \mathfrak{o}' in Zahlkörpern beliebigen Grades; das Auftreten wenigstens eines umkehrbaren irreduziblen zu \mathfrak{o} gehörigen zum Führer nicht teilerfremden Primärideals in \mathfrak{o} ist eine charakteristische Bedingung für die Umkehrbarkeit von \mathfrak{o}' und damit aller zu \mathfrak{o} gehörigen Moduln und zieht die Irreduzibilität aller in \mathfrak{o} enthaltenen und zu \mathfrak{o} gehörigen Primärideale nach sich, wenn der Führer von \mathfrak{o} nach der Hauptordnung \mathfrak{D} ein Primärideal in \mathfrak{o} ist, was stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann. Sie folgt u. a. mit Hilfe eines allgemeinen nicht auf Zahlkörperordnungen beschränkten Satzes über irreduzible Ideale, den vor mehr als 10 Jahren E. Noether aufgestellt, aber nicht publiziert hat. Sodann werden „Primideale“ und Strahlgruppen untersucht; dabei ist in dieser Arbeit ein Primideal definiert als ein nicht in das Produkt zweier nichttrivaler Teiler zerlegbares Ideal. Die Struktur der Strahlgruppe in den verschiedenen charakteristischen Fällen wird bestimmt und eine darauf bezügliche Unterscheidung der Ideale in solche 1. und 2. Art vorgenommen. Es folgen Aussagen über die genaue Struktur der Kompositionsreihen von Primäridealen, insbesondere eine Charakterisierung der irreduziblen in \mathfrak{o} gelegenen Primärideale mit beliebiger \mathfrak{o} umfassender Ordnung \mathfrak{t} als zugehöriger. Bei der Zerlegbarkeit in Primideale (im Sinne der Verf.) werden die Anzahlen der verschiedenen möglichen Zerlegungen bestimmt; sie ist gleich der Anzahl der wesentlich verschiedenen (d. h. nichtisomorphen) Kompositionsreihen aus Idealen, deren zugehörige Ordnung \mathfrak{o} ist. Schließlich wird noch die Anzahl der verschiedenen möglichen Zerlegungen eines Primärideals in irreduzible angegeben.

Grell (Halle).

Moriya, Mikao: Über die Konstruktion algebraischer Zahlkörper unendlichen Grades. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 2, 119—128 (1934).

Nach dem Frobeniusschen Dichtigkeitssatz enthält jeder endliche Galoissche Erweiterungskörper K eines endlichen Zahlkörpers Ω unendlich viele Primideale, deren Zerlegungsgruppe jede vorgeschriebene zyklische Untergruppe der Galoisschen Gruppe von K/Ω ist. Daraus folgt die Existenz unendlich vieler Primideale vom Relativgrad > 1 in K . Verf. zeigt, daß dies nicht mehr zuzutreffen braucht, wenn Ω ein unendlicher Zahlkörper ist. Dabei versteht er nach Herbrand (Math. Ann. 106; dies. Zbl. 4, 244) unter dem Grade eines Primidealteilers \mathfrak{P} von p innerhalb eines unendlichen Zahlkörpers K , den man als das Kompositum einer unendlichen Folge k_1, k_2, k_3, \dots sukzessiver endlicher Erweiterungskörper auffassen kann, den Limes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$, wobei φ_i den Relativgrad des durch \mathfrak{P} teilbaren Primideals \mathfrak{P}_i von k_i in bezug auf k_{i-1} bedeutet $[N_{k_{i-1}}(\mathfrak{P}_i) : \mathfrak{P}_i^{\mathfrak{f}_i}]$. — Verf. konstruiert einen unendlichen Erweiterungskörper k/Ω und einen endlichen Erweiterungskörper K von k derart, daß alle Primideale von K bis auf eine endliche Anzahl den Relativgrad 1 nach k haben. Dazu benutzt er den Hasseschen Existenzsatz (Math. Ann. 95), der besagt, daß einem endlichen Zahlkörper k stets endliche Erweiterungskörper entsprechen, innerhalb deren eine endliche Anzahl vorgegebener Primideale von k in Primideale von gegebenen Relativgraden und Relativordnungen zerfallen. — Zum Schluß zeigt der Verf., daß die mit dem Dichtigkeitssatz verbundenen Eigenschaften der Primideale keineswegs

nur für endliche Zahlkörper charakteristisch sind, indem er unendliche Zahlkörper konstruiert, denen diese Eigenschaften zukommen. *N. Tschebotaröw* (Kasan).

Scorza, G.: *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 20, 65—72 (1934).

Wedderburn hat (vgl. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie) gezeigt, daß man die Restklassen nach dem Radikal einer Algebra der Charakteristik Null stets durch Elemente repräsentieren kann, die eine Algebra bilden. Die Theorie (Scorza, Corpi numerici e algebre. Messina 1921; Dickson, a. a. O.) lehrt, daß man sich immer auf nullteilerfreie Restklassenringe beschränken darf; Verf. zeigt, daß auch im Fall eines endlichen Grundkörpers der (kommutative) Restklassenkörper durch einen Körper aus Elementen repräsentiert werden kann. Das beruht darauf, daß sich der Restklassenkörper durch eine Kongruenz ohne Doppelwurzel erzeugen läßt und so aus der Kongruenzlösung eine Gleichungslösung mit dem Newtonschen Näherungsverfahren (Wurzelkorrektur gleich Funktionswert durch Ableitungswert) erhalten werden kann. In unvollkommenen Körpern geht das nicht immer, und der Verf. zeigt am Beispiel einer zerfallten Körpererweiterung, daß hier der Satz nicht mehr gilt. Der Wedderburnsche Beweis arbeitete mit Erweiterung des Grundkörpers zu einem Zerfällungskörper und verwendet die Charakteristik Null in Gestalt des Diskriminantenkriteriums für Wurzelgrößen, um beim Zerfallen keine Radikalrangerhöhung zu bekommen. — Anschließend Rangeigenschaften, die darauf beruhen, daß das Radikal durch Multiplikation mit den Elementen einer einfachen Algebra in sich übergeht (Darstellungsmodul ist).

Zorn (New Haven, Conn.).

Scorza, G.: *Sulla struttura delle algebre pseudonulle.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 20, 143—149 (1934).

Sei A eine nilpotente Algebra vom Index r (d. h. $A^r = 0$) und bezeichne n_i den Rang von A^i , so gilt für den Rang $n = n_1$ von A die Ungleichung $n \leq \frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1$, wenn $\delta = n_1 - n_2$ gesetzt ist. Im kommutativen Fall läßt sich diese Ungleichung zu $n \leq \binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1$ verschärfen. In diesen Relationen kann insbesondere das Gleichheitszeichen gelten; in diesem Fall ist dann A durch δ und den Koeffizientenkörper bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Grell (Halle a. d. S.).

Vandiver, H. S.: *On the foundations of a constructive theory of discrete commutative algebra.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 20, 579—584 (1934).

Shoda, Kenjiro, und Tadasu Nakamura: *Über das Produkt zweier Algebrenklassen mit zueinander primen Diskriminanten.* Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 443—446 (1934).

Die Verff. zeigen zuerst, daß dem Produkt zweier Algebrenklassen mit zueinander primen Diskriminanten — in der Definition von K. Shoda [Proc. Imp. Acad. Jap. 10 (1934); dies. Zbl. 9, 149 u. 291] — das Produkt der Diskriminanten entspricht. Das Hauptresultat ist, daß das direkte Produkt zweier Maximalordnungen dann und nur dann Maximalordnung im Produkt der zugehörigen Algebrenklassen wird, wenn die Diskriminanten prim zueinander sind. Daß die Bedingung hinreicht, folgt ebenso wie der obige Satz direkt durch Zurückgehen auf die einzelnen p -adischen Stellen; die Notwendigkeit ergibt sich durch Berechnung der Shodaschen Diskriminante. Schließlich wird analog noch ein Kriterium dafür angegeben, daß das Produkt der Maximalordnung einer Algebra A/k mit der Hauptordnung eines Zahlkörpers L/k maximal wird. Notwendig und hinreichend ist außer der Teilerfremdheit der Diskriminanten, daß für jede Stelle der p -Index von A prim zum \mathfrak{p} -Grad von L wird.

E. Noether (Bryn Mawr, Pa.).

Nakamura, Tadasu: *Über die Definition der Shodaschen Diskriminante eines normalen einfachen hyperkomplexen Systems.* Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 447—449 (1934).

Es wird für die Shodasche Diskriminante, die im Kleinen definiert war (vgl. Anm. 1 in der vorangehenden Note), eine Definition im Großen gegeben. Und zwar wird

dabei eine unabhängige Modulbasis nach einem Unterkörper, etwa dem Körper der rationalen Zahlen, und ihre reguläre Darstellung zugrunde gelegt. Es wird die Invarianz dieser Definition und ihr Übereinstimmen mit der Shodaschen gezeigt durch Zurückgehen auf die einzelnen Stellen. *E. Noether* (Bryn Mawr, Pa.).

Tsen, Chiungtze C.: Algebren über Funktionenkörpern. Göttingen: Diss. 1934. 19 S.

Die schon in einer Voranzeige in den Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1933 (Ch. Tsen, Divisionsalgebren über Funktionenkörpern) (vgl. dies. Zbl. 7, 294) teilweise angekündigten Resultate werden hier ausführlich dargestellt. Es sei k eine endliche algebraische Erweiterung über dem Körper $\Omega(x)$ aller rationalen Funktionen mit algebraisch-abgeschlossenem Koeffizientenkörper Ω . Dann gibt es über k als Zentrum keine Schiefkörper endlichen Ranges. Der Beweis des Verf. und ein gleichzeitig mitgeteilter sehr kurzer Beweis von E. Noether beruhen auf der Bemerkung, daß jedes Element α aus k Norm $\alpha = N(\gamma)$ eines passenden Elementes γ aus einem über k endlichen Körper oder Schiefkörper \mathfrak{S} ist, wie auch \mathfrak{S} vorgeben sein möge. Zu ihrem Beweis wird ein von B. L. v. d. Waerden zuerst allgemein bewiesener Satz der Eliminationstheorie [v. d. Waerden, Ein algebraisches Kriterium für die Lösbarkeit eines Systems homogener Gleichungen. Proc. Acad. Weetensch. 29 (1926)] herangezogen, der im dritten, hier ebenfalls angegebenen Beweis von Artin eine wesentliche Rolle spielt. Nimmt man ferner an Stelle von $\Omega(x)$ den Körper $P(x)$ mit reell-abgeschlossenem P , so gibt es über den endlichen Erweiterungen k von $P(x)$ nur Schiefkörper vom Rang 4 mit k als Zentrum. Im Anschluß hieran werden die quadratischen Zerfällungskörper der Algebren über $P(x)$ untersucht; das Problem wird erledigt durch den Satz, daß die Algebra $(\alpha(x), P(x, \sqrt{\beta(x)}), S)$ dann und nur dann einen Schiefkörper darstellt, wenn für geeignetes c aus P sowohl $\alpha(c)$ wie $\beta(c)$ negativ werden. Dies Resultat ist auch mit Hilfe der p -Adik beweisbar; man erhält auch hier das Resultat, daß eine überall zerfallende Algebra schlechthin zerfällt. Weiter wird gezeigt, daß die Körper $K = P(x, \sqrt{-P})$ die einzigen quadratischen Zerfällungskörper für alle Algebren über $P(x)$ sind, wenn P alle positiv definiten Funktionen durchläuft. Im Gegensatz zu dem anfangs genannten Resultat gibt es über dem Körper $K = k(x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 2$) stets endliche Schiefkörper, wie auch der Koeffizientenkörper k gewählt ist.

Grell (Halle a. d. S.).

Moessner, Alfred: On the equation $A_1^n + A_2^n + \dots + A_z^n = B_1^n + \dots + B_z^n$, ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) and allied forms. Math. Student 2, 101–103 (1934).

Es sei $x_1^n + \dots + x_m^n = [x_1, \dots, x_m]^n$. Aus $[c_1, \dots, c_3]^n = [d_1, \dots, d_3]^n$, $n = 2, 4$, folgt, für jedes t , $[t - c_1, \dots, t - c_3, t + c_3, \dots, t + c_1]^n = [t - d_1, \dots, t - d_3, t + d_3, \dots, t + d_1]^n$ für $n = 1, \dots, 5$. Aus $[e_1, \dots, e_6]^n = [f_1, \dots, f_6]^n$, $n = 1, 2, \dots, 5$ folgt für jedes k : $[e_1, \dots, e_6, f_1 + k, \dots, f_6 + k]^n = [f_1, \dots, f_6, e_1 + k, \dots, e_6 + k]^n$ für $n = 1, \dots, 6$. Man sehe auch dies. Zbl. 9, 245. *N. G. W. H. Beeger*.

Pillai, S. S.: Remarks on the previous paper of dr. Moessner. Math. Student 2, 104–106 (1934).

Vgl. vorst. Ref.

Katzman, I.: About a mistake of P. Tshebyshov. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 81–83 u. engl. Zusammenfassung 83 (1934) [Ukrainisch].

Verf. weist auf die Tatsache hin, daß die Zahl $2^{23} - 1$ durch 47 teilbar ist. Somit ist auch der Satz von Tschebyscheff (s. P. Tschebyscheff, Theorie der Kongruenzen, dritte Ausgabe, § VIII, Satz 67), daß $2^{23} - 1$ eine Primzahl sei, falsch.

Lubelski (Warschau).

Katzman, J.: A simple proceeding for composing a range of Heron numbers. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 85–88 u. engl. Zusammenfassung 88 (1934) [Ukrainisch].

Verf. bietet eine geometrische Methode, mittels welcher er alle Heronschen Dreiecke erhält. Ref. betont, daß diese Lösung im wesentlichen Bachet gegeben hat (vgl.

L. Dickson, History of the theory of numbers. II., S. 191—192. Washington 1920), wo auch die reiche Literatur zu dieser Frage zu finden ist (Kap. V). *Lubelski.*

Katzman, I.: Base mathématique du projet du nouveau système monétaire. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 77—79 (1934) [Ukrainisch].

Verf. weist auf die Wichtigkeit des dyadischen Systems für den Geldumlauf hin.

Lubelski (Warschau).

Estermann, T., and C. L. Barham: On the representations of a number as the sum of four or more N -numbers. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 340—353 (1934).

The problem is to determine the asymptotic behaviour of $\nu_r(n)$, the number of representations of n as the sum of r N -numbers, an N -number being a positive integer not divisible by the N -th power of any prime. Putting

$$\nu_r(n) = \frac{n^{r-1}}{(r-1)! \zeta^r(N)} S(n) + \Delta,$$

where

$$S(n) = \prod_{p^{N+1} \nmid n} \left\{ 1 + \frac{(-1)^{r-1}}{(p^N - 1)^r} \right\} \prod_{p^N | n} \left\{ 1 + \frac{(-1)^r}{(p^N - 1)^{r-1}} \right\},$$

it is proved that $\Delta = O(n^{r-2+1/N} \log^\alpha n)$, ($r \geq 4$), where $\alpha = 3(N=2, r=4) = 2$ otherwise. This is an improvement on previous results obtained by Linfoot and Evelyn (see this Zbl. 4, 342). The method is that by which Hardy and Littlewood investigated the representations of a number as a sum of primes (see Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie 1, Tl. 5). The present paper is of interest because it is an application of this method in which no unproved hypothesis is involved.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Chowla, S.: An extension of Heilbronn's class-number theorem. Indian Phys.-Math. J. 5, 53—57 (1934).

Chowla proves his theorem announced previously (this Zbl. 10, 152).

G. Pall (Montreal).

Pipping, Nils: Ein neues Kriterium für die reellen kubischen Irrationalzahlen. Acta Acad. Åboens. 8, H. 6, 1—20 (1934).

Verf. setzt seine Untersuchungen über Kriterien für reelle algebraische Zahlen fort und erhält einfachere Algorithmen als bisher (vgl. dies. Zbl. 6, 251). Die vorliegende erste Arbeit betrifft kubische Irrationalzahlen. Man versteht unter (a, b, c, d) Systeme aus vier positiven Zahlen, die nach fallender Größe anzuordnen sind und die alsdann den Bedingungen (1): $a > b > c > d$, $a \neq c + d$, $b \neq c + d$ genügen. Sei ω eine reelle Zahl mit $\omega > 0$. Von dem System $(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$ ausgehend, gewinnt man eine Menge Σ solcher Systeme, indem man mit jedem System (a, b, c, d) , das schon zu Σ gehört und den Forderungen (1) genügt, für $c + d < b$ das neue System $(a - b, b, c, d)$, für $b < c + d < a$ die zwei neuen Systeme $(a - b, b, c, d)$ und $(a + b - c - d, c + d - b, c, d)$ und für $a < c + d$ die zwei neuen Systeme $(a - b, b, c, d)$ und $(c + d - a, c + d - b, c, d)$ mit zu Σ nimmt. Man sagt, Σ breche ab, wenn sein Anfangsglied $(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$ oder ein von diesem nach den vorigen Regeln abgeleitetes späteres System von Σ nicht mehr den Forderungen (1) genügt. Verf. zeigt den Satz: „ ω ist dann und nur dann algebraisch höchstens vom Grad drei, wenn Σ abbricht.“ *Mahler.*

Pipping, Nils: Ein neues Kriterium für die reellen algebraischen Zahlen n -ten Grades. Acta Acad. Åboens. 8, H. 7, 1—14 (1934).

Diese zweite Arbeit behandelt ein sehr einfaches Kriterium für reelle Zahlen beliebigen Grades. Verf. betrachtet Systeme (v_0, v_1, \dots, v_n) von $n + 1 \geq 3$ positiven Zahlen, die nach fallender Größe anzuordnen sind und alsdann den Bedingungen (1): $v_0 > v_1 > \dots > v_n$ genügen. Sei ω eine positive reelle Zahl. Von dem System $(1, \omega, \dots, \omega^n)$ ausgehend, gewinnt man eine Menge Σ solcher Systeme, indem man mit jedem System (v_0, v_1, \dots, v_n) , das schon zu Σ gehört und das (1) genügt, die

k neuen Systeme $(v_0 - v, v_1, \dots, v_n)$, $v = 1, 2, \dots, k$, mit zu Σ nimmt; dabei ist $k = l$ zu setzen, wenn es eine natürliche Zahl l mit

$$v_{l+1} + v_{l+2} + \dots + v_n < v_1 < v_0 - v_{l+1}$$

gibt, sonst $k = n - 1$. Man sagt, Σ breche ab, wenn sein Anfangsglied $(1, \omega, \dots, \omega^n)$ oder ein späteres Glied (v_0, v_1, \dots, v_n) , das nach diesen Regeln abgeleitet wurde, nicht mehr (1) befriedigt; Verf. zeigt: „ ω ist dann und nur dann algebraisch höchstens vom Grad n , wenn Σ abbricht.“

Mahler (Groningen).

Mahler, Kurt: Über Diophantische Approximationen im Gebiete der p -adischen Zahlen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 44, 250—255 (1934).

Der berühmte Minkowskische Linearformensatz wird ins p -adische übertragen; es werden sogar Formensysteme betrachtet, wo die Koeffizienten verschiedener Formen zu $t + 1$ verschiedenen Körpern gehören können, nämlich zum reellen Körper, oder zu einem P_τ -adischen Körper, wo P_τ eine Primzahl ist ($\tau = 1, 2, \dots, t$; $t \geq 1$). Es wird dann gezeigt: „Seien

$$L^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^n a^{(h,k)} x_k \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

n Linearformen in n Unbestimmten mit reellen Koeffizienten und der nichtverschwindenden Determinante $d = |a^{(h,k)}|$, seien ferner für $\tau = 1, 2, \dots, t$

$$L_\tau^{(h)}(x) = \sum_{k=1}^{n_\tau} a_\tau^{(h,k)} x_k \quad (h = 1, 2, \dots, n_\tau)$$

je endlich viele Linearformen in denselben Unbestimmten mit ganzen P_τ -adischen Koeffizienten, seien $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(n)}$ n positive und $f_\tau^{(1)}, \dots, f_\tau^{(n_\tau)}$ für $\tau = 1, 2, \dots, t$ je n_τ nichtnegative ganze rationale Zahlen. Wenn dann die Gleichung

$$\prod_{h=1}^n \Lambda^{(h)} \prod_{\tau=1}^t \prod_{h=1}^{n_\tau} P^{-f_\tau^{(h)}} = |d|$$

erfüllt ist, so gibt es n ganze rationale Zahlwerte für x_1, \dots, x_n , die nicht alle zugleich verschwinden, so daß

$$\left. \begin{aligned} |L^{(h)}(x)| &\leq \Lambda^{(h)} & (h = 1, 2, \dots, n), & (1) \\ |L_\tau^{(h)}(x)|_{P_\tau} &\leq P_\tau^{-f_\tau^{(h)}} & \left(\begin{array}{l} \tau = 1, 2, \dots, t \\ h = 1, 2, \dots, n_\tau \end{array} \right) & (2) \end{aligned} \right\} \quad \text{A)}$$

ist.“ — Beim einfachen Beweis wird System (A) durch ein anderes ersetzt, in dem jede Ungleichung (2) unter Benutzung elementarer Kongruenzen durch eine Ungleichung

$$|L_\tau^{(h)}| < 1$$

ersetzt wird, wo $L_\tau^{(h)}$ eine Linearform mit reellen, und zwar ganzen rationalen Koeffizienten in $n + 1$ Unbestimmten $x_1, \dots, x_n, x_{\tau,h}$ ist. Auf das neue System von $n + n_1 + \dots + n_t$ Formen mit ebensoviele Unbekannten wird dann der gewöhnliche Minkowskische Satz angewendet. Es folgen einige Anwendungen.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Sur un problème de M. Ruziewicz concernant les superpositions de fonctions jouissant de la propriété de Baire. Fundam. Math. 24, 12—16 (1934).

Proof of the following statements: Every real function $f(x) = \Psi(\Phi(x))$, where Φ and Ψ are at most pointwise discontinuous. Real functions exist which cannot be obtained by means of a finite or a denumerable number of superpositions of functions having the Baire property.

Blumberg (Columbus).

Sierpiński, W.: Sur deux problèmes de M. Ruziewicz concernant la décomposition de l'intervalle en paires de points. Fundam. Math. 24, 43—47 (1934).

Proof that the following two problems of Ruziewicz are to be answered respectively in the affirmative and the negative, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ being assumed in the latter case:

1. Can one, for every decomposition of the interval $I = (0, 1)$ into pairs of distinct points, and for every α , $0 < \alpha < 1$, select a set of pairs constituting a set of measure α ? 2. Does a decomposition of I into pairs of distinct points exist such that every sum δ of a non-denumerable infinity of these pairs for which $I - S$ is non-denumerable is non-measurable?

Blumberg (Columbus).

Szpilrajn, Edward: Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles. *Fundam. Math.* 24, 17—34 (1934).

A real function $f(x)$ is said to have property (s) — due to Sierpiński — if for every perfect set P of x 's there is a perfect set $P_1 \subset P$ such that $f|P_1$ is continuous. Correspondingly, a subset E of a space X is said to have property (s) if every perfect subset of X contains a perfect set P such that $P \subset E$ or $\bar{P}E = 0$. The present article is devoted to a detailed study of sets and functions of property (s). Among the numerous results, there is to be especially noted the following: Property (s) is an invariant of the operation (A), of generalized homeomorphism, of cartesian multiplication, and of superposition — in contrast with what is true of functions of the Baire property (in the restricted sense).

Blumberg (Columbus).

Adams, C. Raymond, and James A. Clarkson: Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 711—730 (1934).

Dans un mémoire antérieur [*Trans. Amer. Math. Soc.* 35, 824—854 (1933); *ce Zbl.* 8, 6; voir aussi: *Verh. Intern. Math.-Kongr. Zürich* 2, 122—123 (1932)] MM. Adams et Clarkson ont discuté les relations entre les classes de fonctions de deux variables à variation bornée au sens des diverses définitions. La note présente complète ce mémoire. Les auteurs établissent et rassemblent une série de résultats liés principalement à la mesurabilité, la continuité, la différentiabilité etc. des fonctions appartenant aux dites classes. P. ex. 1° Toute fonction à variation bornée au sens de Vitali est dans tout point, à un ensemble au plus dénombrable près, soit continue par rapport à l'ensemble des variables, soit discontinue par rapport à une variable au moins. 2° Pour une fonction à variation bornée au sens de Hardy les points de discontinuité sont situés sur une infinité au plus dénombrable des droites parallèles aux axes. 3° Pour une fonction à variation bornée au sens de Pierpont l'ensemble de points où la fonction n'est pas continue, est de mesure nulle. 4° Toute fonction monotone dans deux directions, arbitraires mais fixées, est à variation bornée au sens de Pierpont. Les auteurs remarquent que contrairement à la définition de Pierpont celles de Vitali, de Hardy et de Arzelà dépendent essentiellement des axes des coordonnées. Un fait analogue, bien que moins évident, est établi pour la définition de Tonelli; notamment, la fonction caractéristique de l'ensemble plan $E \times E$ où E est l'ensemble de Cantor dans l'intervalle $(0, 1)$, est à variation bornée au sens de Tonelli, mais cesse de l'être quand les axes subissent une rotation de l'angle $\pi/4$. *Saks* (Warszawa).

Jeffery, R. L.: Derived numbers with respect to functions of bounded variation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 36, 749—758 (1934).

L'auteur étudie des nombres dérivés d'une fonction $F(x)$ par rapport à une fonction donnée $\omega(x)$, monotone et non-décroissante. En supposant que $F(x)$ est constante dans les intervalles où $\omega(x)$ l'est et que, aux points de discontinuité de $\omega(x)$, la fonction $F(x)$ n'admet que des discontinuités de 1^e espèce au plus, l'auteur étend aux nombres dérivés relatifs de $F(x)$ par rapport à $\omega(x)$ les relations bien connues de Denjoy-Young et de Denjoy-Khintchine entre les dérivés ordinaires. Les dérivés extrêmes $D_{\omega}F^+$, $D_{\omega}F_+$ etc. sont définis comme limites d'indétermination (à droite et à gauche respectivement) du quotient $\{F(x+h) - F(x)\} / \{\omega(x+h) - \omega(x)\}$, en y remplaçant, dans le cas où x est un point de discontinuité de ω , les valeurs $\omega(x)$ et $F(x)$ par $\omega(x+0)$ et $F(x+0)$ pour $h < 0$ et par $\omega(x-0)$ et $F(x-0)$ pour $h > 0$. D'une manière analogue on définit les dérivés approximatifs relatifs, en tenant compte de la notion de mesure relative par rapport à $\omega(x)$. — En admettant, en outre, que $F(x)$ est continue toutes les fois que $\omega(x)$ l'est, et que aux points de discontinuité de $\omega(x)$

la valeur $F(x)$ est comprise entre $F(x-0)$ et $F(x+0)$, l'auteur démontre 1° que $F(x)$ est déterminée (à une constante additive près) par son nombre dérivé $D_\omega F^+$ supposé fini partout 2° que $F(x)$ peut être retrouvé à partir de ce dérivé par un procédé de totalisation de Denjoy-Stieltjes [cf. le mémoire précédent de l'auteur, Trans. Amer. Math. Soc. 34, 645—675 (1932); ce Zbl. 4, 390]; on a notamment $F(x-0) - F(a) = \int_a^x D_\omega F^+(t) d\omega(t)$ et $F(x+0) - F(a) = \int_a^x D_\omega F^+(t) d\omega(t)$. Ces résultats (avec quelques restrictions dans certains cas) sont généralisés aux nombres dérivés par rapport à une fonction à variation bornée, non nécessairement monotone. *Saks.*

Hanson, E. H.: A new proof of a theorem of Denjoy, Young, and Saks. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 691—694 (1934).

A proof of the generalized theorem of Denjoy on the Dini derivatives, namely, that almost everywhere the directional angle of $y = f(x)$, $f(x)$ arbitrary, is 0° or 180° or 360° , along simple lines, the intuitive envirement leading directly, by means of well-known procedures, to the rigorous argument. *Blumberg (Columbus).*

Keldyš, L.: Sur les fonctions premières mesurables B. C. R. Acad. Sci. URSS 4, 192—195 u. franz. Text 195—197 (1934) [Russisch].

Toute fonction mesurable B de classe α dans un domaine, qui ne peut pas prendre ses valeurs d'une infinité dénombrable de fonctions de classes inférieures, est, par définition, une fonction première de classe α . L'auteur résout une question, posée par P. Novikoff, en démontrant qu'il existe une fonction première dans chaque classe de fonctions mesurables B . *J. Ridder (Groningen).*

Jessen, Borge: Abstrakte Maß- und Inhaltstheorie. I. Mat. Tidsskr. B 1934, 73 bis 84 [Dänisch].

In einer Reihe von Aufsätzen soll eine vollständige Einführung in die allgemeine Lebesguesche Theorie für beliebige Mengen gegeben werden. Hier wird zunächst — didaktisch sehr geschickt — die Maßtheorie entwickelt. Die Inhalts- bzw. Maßfunktionen werden als nichtnegative und additive bzw. absolut additive Mengenfunktionen definiert, die auf einem Körper bzw. σ -Körper \mathfrak{F} von Mengen definiert sind, mit der Zusatzvoraussetzung, daß jedes $A \in \mathfrak{F}$ in der Vereinigungsmenge von höchstens abzählbar vielen A_n aus \mathfrak{F} mit endlichem Inhalt bzw. Maß enthalten ist. Eine Maßfunktion heißt vollständig, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wieder zu \mathfrak{F} gehört. Gebracht wird der Satz, daß die absolut additiven Inhaltsfunktionen, und nur diese, zu Maßfunktionen erweitert werden können, und zwar eindeutig zu „kleinsten“ vollständigen Maßfunktionen. *Willy Feller (Stockholm).*

Jessen, B.: The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions. Acta math. 63, 249—323 (1934).

The subject of this very interesting memoir is the theory of integration in a space Q_ω of infinitely many variables and applications of that theory to almost periodic functions. The space Q_ω is obtained from the space of all real sequences $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ by reduction of the terms mod. 1. An one-to-one correspondence is established between the points of Q_ω , and the points of the interval $0 \leq t \leq 1$. By means of this correspondence ("the transferring principle") a theory of measure and integration can be constructed in Q_ω , and most of the familiar properties of an integral hold in the new case. Every function $f(x)$ integrable over Q_ω can be expanded into a Fourier series $\sum_{c_{p_1, p_2, \dots, p_n}} e^{2\pi i(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n)}$; and we have the Parseval and Riesz-Fischer theorems. Using special properties of the series $\sum c_p e^{2\pi i x_p}$, the author establishes, among others, the following theorems, which generalize a number of known results. Let $\{\lambda_k\}$ be a sequence of different real numbers; (I) if $\sum |a_k|^2 = \infty$, then, for "almost every" point $x = (x_1, x_2, \dots)$ in Q_ω , the series (*) $\sum a_k e^{2\pi i x_k} e^{i \lambda_k t}$ is not a Fourier series of an almost periodic function in the Besicovitch sense. (II) If $\sum |a_k|^2 < \infty$, then, for almost every x in Q_ω , the series (*) is the Fourier series of a function belonging to the class B_p a. p. (Besicovitch's class, with index p , of almost periodic functions),

for, every $p > 0$. Let (α, β) be the largest interval in the interior of which the series $\sum |a_k|^2 e^{2\lambda_k \sigma}$ converges; then (III) for almost every x in Q_ω , the series $\sum a_k e^{2\pi i x k} e^{\lambda_k s}$ ($s = \sigma + i b$) converges to a regular function $f(s, x)$ in the interior of the strip $\alpha < \sigma < \beta$ and is not continuable across the lines $\sigma = \alpha$ and $\sigma = \beta$; moreover (IV) for almost every x , $f(s, x) = o(\sqrt{|\log |t||})$ as $|t| \rightarrow \infty$, uniformly in every strip (α_1, β_1) interior to (α, β) . The rest of the paper is devoted to the study of the distribution of the values of the function $f(x) = \sum a_p e^{2\pi i x p}$ and of the functions $f(s, x) = \sum a_p e^{2\pi i x p} e^{\lambda_k s}$. We quote the following result: if at least 5 of the a 's are different from 0, the function $f(x)$ has a distribution function, and the density of the distribution is continuous.

Zygmund (Wilno).

Analysis.

Flamant, Paul: Concavité et convexité des courbes planes. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles 1, 75—81 (1934).

Elementare Bemerkungen über die Diskussion von Kurven $y = f(x)$ mit den Mitteln der Differentialrechnung.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Leja, F.: Sur la définition du diamètre et de l'écart transfini d'un ensemble. Ann. Soc. Polon. math. 12, 29—34 (1934).

Die Punkte P_1, P_2, \dots, P_n mögen, unabhängig voneinander, eine gegebene abgeschlossene Menge E durchlaufen. Es sei $|PQ|$ eine positive Distanzfunktion und

$$M_n = \max_{P, Q \in E} \min_{1 \leq j \leq n} \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} |P_k P_j|.$$

In den beiden Spezialfällen, wo $|PQ|$ mit der gewöhnlichen Distanz bzw. mit dem Inhalt des Dreieckes OPQ übereinstimmt (O eine feste Stelle), beweist Verf. die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n}.$$

Im ersten Falle ist dieser Limes mit dem transfiniten Durchmesser identisch. Ist der Grenzwert für jede positive Distanzfunktion vorhanden? Szegő (St. Louis).

Leja, F.: Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green. Ann. Soc. Polon. math. 12, 57—71 (1934).

Darlegung der Beweise für die Sätze, welche in den vorläufigen Mitteilungen im C. R. Acad. Sci., Paris 198, 42, 231 (dies. Zbl. 8, 115, 208) ausgesprochen worden sind.

Szegő (St. Louis, Mo.).

Geronimus, J.: Sur l'équivalence de deux problèmes extrémales. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1010—1012 (1934).

Es sei $\varphi(\vartheta)$ ein festes trigonometrisches Polynom n -ter Ordnung, $p(\vartheta)$ durchlaufe alle trigonometrischen Polynome gleicher Ordnung, $f(\vartheta)$ alle Funktionen, deren Fouriersche Entwicklung mit $\varphi(\vartheta)$ beginnt. Dann ist $\max |f(\vartheta)|$ (wohl obere Grenze) dann möglichst klein, wenn fast überall $f(\vartheta) = Lsg p_0(\vartheta)$. Hier bezeichnet $p_0(\vartheta)$ das trigonometrische Polynom n -ter Ordnung, für das

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\vartheta) p(\vartheta) d\vartheta}{\int_{-\pi}^{\pi} |p(\vartheta)| d\vartheta}$$

maximal ist, L den Wert dieses Maximums.

Szegő (St. Louis, Mo.).

Bernstein, S.: Sur l'interpolation trigonométrique par la méthode des moindres carrés. C. R. Acad. Sci. URSS 4, 1—5 u. franz. Text 5—8 (1934) [Russisch].

Ausgehend von einer Interpolationsaufgabe untersucht Verf. die trigonometrischen Polynome

$$S_h(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \frac{\sin \frac{2h+1}{2} \left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)}{\sin \frac{1}{2} \left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)}, \quad h < \frac{p}{2},$$

sowie ihre Mittel

$$\sigma_h(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{h-1}(x)}{h}.$$

Es gilt für $|f| \leq 1$: $|S_h| < \log(2h+1) + 2$ und $|\sigma_h| \leq 1$. Der Ausdruck

$$S_h(x) + S_h\left(x + \frac{2\pi}{2h+1}\right)$$

bleibt ferner unter dieser Bedingung gleichmäßig beschränkt. Schließlich werden die Ergebnisse auf den Fall angewendet, wo $f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ mit dem Jacobischen Symbol $\left(\frac{k}{p}\right)$ übereinstimmt. — Im Falle $p = 2m+1$, $h = m$ ist $S_h(x)$ das gewöhnliche Lagrange'sche trigonometrische Interpolationspolynom, im Falle $p = 2m$ steht der vom Verf. betrachtete Ausdruck $S_m^*(x)$ zu einer Interpolationsformel von M. Riesz [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 23, 354 (1915)] in naher Beziehung. Szegő (St. Louis, Mo.).

Szegő, G.: Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungs-funktion gehören. Math. Ann. 110, 501–513 (1934).

The author considers the polynomial $E_n(x)$, of degree $n+1$, generated by the Legendre function of second kind

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(t)}{x-t} dt = b_0 x^{-n-1} + \dots, \quad \frac{1}{Q_n(x)} = E_n(x) + a_1 x^{-1} + \dots,$$

and gives proofs of the following statements made by Stieltjes in his last letter to Hermite: the zeros x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) of $E_n(x)$ are all real, distinct and lie between -1 and 1 ; moreover, they are separated by those of $P_n(x)$. — The author makes use of the following representations of $Q_n(x)E_n(x)$, $E_n(x)P_n(x)$:

$$\left. \begin{aligned} Q_n(x) E_n(x) &= 1 + \sum_{i=0}^n c_i Q_{n+1+i}(x) \\ E_n(x) P_n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i P_{n+1+i}(x) \end{aligned} \right\} \quad (c_i \text{ proper constants}),$$

the second of which is equivalent to the orthogonality property of $E_n(x)$ as indicated by Stieltjes:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) E_n(x) x^k dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

where the weight function $P_n(x)$ changes sign in $(-1, 1)$. The proof is achieved by combining the limiting relations

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [Q_n(x+i\varepsilon) - Q_n(x-i\varepsilon)] &= -i\pi P_n(x) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [Q_n(x+i\varepsilon) + Q_n(x-i\varepsilon)] &= 2Q_n^*(x) \end{aligned} \right\}, \quad -1 < x < 1,$$

$[Q_n^*(x)$ analytic inside $(-1, 1)$, with $n+1$ zeros therein, separated by those of $P_n(x)$] with the representation of $Q_n(x)$ as a hypergeometric series, with $x = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$, $|w| > 1$. The author further shows that the above properties of $E_n(x)$ hold if $P_n(x)$ is replaced by the ultraspherical (symmetric Jacobi) polynomial $P_n^{(\mu)}(x)$, with $0 < \mu \leq 2$ [for $\mu < 0$ the roots lie outside $(-1, 1)$; for $\mu > 2$ the question remains open]. He closes by constructing, with the x_i as abscissas, a mechanical quadratures formula of Gauss' type, holding true for any polynomial of degree $\leq 2n+1$; its Christoffel coefficients turn out to be of alternating signs. J. Shohat (Philadelphia).

Krawtchouk, M.: Quelques résultats nouveaux dans la méthode des moments. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 1, 3–18 u. franz. Zusammenfassung 19–20 (1933) [Ukrainisch].

The author assumes that y is the unique solution of the differential system $L(y) = y^{(k)} + B_1(x)y^{(k-1)} + \dots + B_k(x)y = f(x)$

$$u_h[y] = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_h^{(i)} y^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_h^{(i)} y^{(i)}(2\pi) = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, k),$$

in the interval $[0, 2\pi]$. If the coefficients $c_m^{(n)}$ of the sum $y_n = \sum_{m=-n}^n c_m^{(n)} \varphi_m(x)$ satisfy the conditions

$$\int_0^{2\pi} \{L[y_n] - f(x)\} \frac{\cos mx}{\sin mx} dx = 0, \quad (m = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n),$$

where the functions $\varphi_m(x)$ are defined by the equations

$$\mu[\varphi_{\pm m}] = \varphi_{\pm m}^{(k)} + A_1 \varphi_{\pm m}^{(k-1)} + \dots + A_k \varphi_{\pm m} = \frac{\cos mx}{\sin mx},$$

$$u_h[\varphi_{\pm m}] = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, k),$$

it follows that

$$|y^{(s)} - y_n^{(s)}| \leq \frac{A_s \log n}{n}, \quad (s = 0, 1, \dots, k-1),$$

where the numbers A_s are independent of n . The author also shows that if $p(x)$ is a positive bounded function in the interval $[0, 1]$, then

$$\int_0^1 p(x) x^s dx = \varrho_1 \alpha_1^s + \varrho_2 \alpha_2^s + \dots + \varrho_n \alpha_n^s, \quad (s = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

where all the numbers ϱ_i are non-negative and the numbers α_i satisfy the inequalities

$$0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} = 1.$$

Moreover, one has the following inequality

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} p(x) dx < v \bar{p} \frac{\log n}{n}, \dots, \quad (n \geq 3),$$

where v is an absolute constant and \bar{p} is the upper bound of $p(x)$. Also, if a function $q(x) \geq 0$ satisfies the equalities

$$\int_0^1 q(x) x^l dx = \int_0^1 p(x) x^l dx, \quad (l = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

then

$$\left| \int_0^x q(x) dx - \int_0^x p(x) dx \right| < w \bar{p} \frac{\log n}{n},$$

where w is an absolute constant.

I. S. Sokolnikoff (Madison).

Krawtchouk, M.: Sur le problème des moments. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 1, 21—38 u. franz. Zusammenfassung 39 (1933) [Ukrainisch].

The author considers a polynomial

$$\omega_n(x) = x^n + a_n x^{n-1} + b_n x^{n-2} + \dots$$

which satisfies, in the interval $[a, b]$, the orthogonality conditions:

$$\int_a^b p(x) \omega_n(x) x^m dx = 0, \quad (m = 0, 1, \dots, n-1),$$

where $p(x)$ is a bounded and non-negative function. He derives the following results:

1. If $\omega_n(x)$ has no roots in the interval $[\alpha, \beta]$ then

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x) dx = Q_n \cdot \frac{\log n}{n}, \quad (n > 1),$$

where Q_n is a bounded function of n . — 2. If $P(x)$ is a monotone function in $[a, b]$ and satisfies the equalities

$$\int_a^b x^k dP(x) = \int_a^b x^k p(x) dx, \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

then

$$\left| \int_a^x dP(x) - \int_a^x p(x) dx \right| < \frac{k \log n}{n} \quad (n > 1)$$

where the constant k is determined by $p(x)$ alone. Similar results hold if a and b are infinite.

I. S. Sokolnikoff (Madison).

Offord, A. C.: On Fourier transforms. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 197 bis 216 (1934).

Es sei $f(x)$ integrierbar in jedem endlichen Intervall $(0, a)$. Damit

$$F(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \cos xu f(u) du$$

fast überall (C, 1) summierbar ist, ist es hinreichend, daß $\left| \int_0^{\omega} \left(1 - \frac{u}{\omega}\right) \cos xu f(u) du \right| \leq M$

für alle $\omega \geq 0$ und alle $x \geq 0$; und die Inversionsformel $f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \cos xu F(u) du$

besteht fast überall (C, 2) und (nach einem Addendum) sogar (C, 1). — Wenn überdies $f(u)$ beschränkt ist, so besteht volle Symmetrie zwischen $f(x)$ und $F(x)$, und damit dann $f(x) = F(x)$ ist, ist es notwendig und hinreichend, daß fast überall

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) x^{-\frac{1}{2}-it} dt \quad (\text{C, 1}), \quad \text{wobei} \quad \frac{\chi(t) 2^{-\frac{1}{2}-it}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}it)}$$

eine gerade Funktion ist und $\left| \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \chi(t) x^{-\frac{1}{2}-it} dt \right| \leq M$ für alle $T \geq 0$ und alle $x \geq 0$. Bochner (Princeton).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Kuzmin, R.: Sur la théorie des séries de Dirichlet $L(s)$. C. R. Acad. Sci. URSS 3, 560—562 u. franz. Text 562—564 (1934) [Russisch].

L'A. démontre pour les séries de Dirichlet $L(s)$ une formule fonctionnelle généralisant celle de Riemann-Siegel. Cette formule permet à l'auteur d'évaluer, pour les fonctions $L(s)$, la fonction correspondante $N(t)$ [nombre des zéros de $L(s)$ de la forme $s = \frac{1}{2} + ti$, $0 < t < T$]. On a $N(T) > 0,084 T + O(\sqrt{T} \log T)$. Mandelbrojt.

Rios, S.: Sopra l'ultraconvergenza delle serie di Dirichlet. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 20, 158—161 (1934).

L'A. indique entre autre des classes (α) de séries $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ telles qu'il suffise qu'une telle série soit ultraconvergente en un point régulier de son axe de convergence, pour qu'elle puisse se mettre sous la forme d'une somme d'une série (α) «lacunaire» et une série d'un axe de convergence inférieur à celui de la série donnée elle-même. Il établit également du théorèmes d'ultraconvergence concernant les expressions de la forme $\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} d\alpha(\lambda)$. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Favard, J.: Sur la fonction conjuguée d'une fonction presque-périodique. Mat. Tidsskr. B 1934, 57—60.

Es sei $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n t}$ eine fastperiodische Funktion; als konjugierte Reihe der Fourierreihe von $f(t)$ bezeichnet man die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} i A_n \operatorname{sgn} A_n e^{i\lambda_n t}$ (wo $\operatorname{sgn} A_n = +1$ für $A_n > 0$, 0 für $A_n = 0$, -1 für $A_n < 0$). In seiner Thèse (Paris 1927) hatte der Verf. mit Hilfe harmonischer Funktionen den folgenden interessanten Satz bewiesen: Wenn $f(t)$ ein beschränktes (und also fastperiodisches) Integral besitzt und außerdem einer Lipschitzbedingung $|f(t_2) - f(t_1)| \leq H |t_2 - t_1|^{\alpha}$ (wo $0 < \alpha \leq 1$) genügt, dann ist die konjugierte Reihe ebenfalls die Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion $g(t)$, die als konjugierte Funktion von $f(t)$ bezeichnet wird. Für diesen Satz wird jetzt ein sehr einfacher und direkter

Beweis mitgeteilt: Das Integral $h_{\varrho, A}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\varrho}^A \frac{f(x+t) - f(-x+t)}{x} dx$ (wo $0 < \varrho < A$)

stellt eine fastperiodische Funktion von t dar, und aus den Voraussetzungen über $f(t)$ folgt, daß $h_{e,A}(t)$ für $A \rightarrow \infty$ und $\varrho \rightarrow 0$ gleichmäßig einer Grenzfunktion $g(t)$ zustrebt, die somit wieder fastperiodisch ist. Eine Berechnung der Fourierreihe von

$h_{e,A}(t)$ liefert $h_{e,A}(t) \sim \frac{2i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \int_0^A \frac{\sin A_n x}{x} dx \right\} e^{i A_n t}$, woraus durch Grenzübergang folgt,

daß die Fourierreihe von $g(t)$ gerade die konjugierte Reihe ist.

B. Jessen.

Differentialgleichungen:

Bower, O. K.: Applications of an abstract existence theorem to both differential and difference equations. Ann. of Math., II. s. 35, 748—758 (1934).

A function $\Phi(z)$ is of class K in a finite region R bounded by some set of circles, segments and lines if it is analytic in R and $z^k \Phi(z)$ has a limit as z approaches infinity. In the author's abstract existence theorem for the functional equation $f = g + Sf$, a unique solution of class K in a region R_2 contained within a region R_1 lying within R is found by restricting the operator S so that (a) $S\Phi$ exists and is of class K in R_1 whenever Φ has this property (b) the infinite series $\Phi + S\Phi + S^2\Phi + \dots$ converges in an R_2 which is the same for all functions Φ and represents a function $\Psi(z)$ of class K in R_2 . (c) This function $\Psi(z)$ is such that $S\Psi = S\Phi + S^2\Phi + S^3\Phi + \dots$. This existence theorem is applied to integral equations, difference equations, differential equations, mixed equations and q -difference equations with relatively simple solutions in the neighbourhood of infinity.

H. Bateman (Pasadena).

Orts, J. M.^a: Bemerkungen zu den linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 9, 128—131 (1934) [Spanisch].

Smohorshewsky, A. S.: Sur la fonction de Green d'une équation différentielle linéaire ordinaire. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 31—47 u. franz. Zusammenfassung 47—48 (1934) [Ukrainisch].

Etant donné un système différentiel

$$M[z] \equiv z^{(k)} + p_1 z^{(k-1)} + \dots + p_k z = 0; \quad \alpha_{i0} z(a) + \alpha_{i1} z'(a) + \dots + \alpha_{i,k-1} z^{(k-1)}(a) = \\ = \beta_{i0} z(b) + \beta_{i1} z'(b) + \dots + \beta_{i,k-1} z^{(k-1)}(b) \quad (i = 0, 1, \dots, k-1),$$

l'auteur établit les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce système soit son propre adjoint (c. à d. que la fonction de Green supposée existante soit symétrique): 1) k est un nombre pair; 2) $M[z]$ est identique à son adjoint; 3) notations:

$$\mathfrak{A} = \|\alpha_{ij}\|, \mathfrak{B} = \|\beta_{ij}\|, i, j = 0, 1, \dots, k-1; \mathfrak{A}' = \|\alpha_{ji}\|, \mathfrak{B}' = \|\beta_{ji}\|, j, i = k-1, \dots, 1, 0;$$

$\mathfrak{P}(x)$ est le tableau des coefficients de $z, z', \dots, z^{(k-1)}$ dans les polynômes adjoints aux polynômes

$$p_l z + p_{l-1} z' + \dots + p_2 z^{(l-2)} + z^{(l)} \quad (l = 0, 1, \dots, k-1);$$

condition: $\mathfrak{A} \mathfrak{P}(a)^{-1} \mathfrak{A}' = \mathfrak{B} \mathfrak{P}(b)^{-1} \mathfrak{B}'$. Une autre forme de telles conditions a été donnée par D. Jackson, Trans. Amer. Math. Soc. 17, 418—424 (1916). W. Stepanoff.

Rybakov, B. N.: Sur les solutions bornées d'une équation différentielle du premier ordre. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 59—63 (1934) [Ukrainisch].

En écrivant l'équation différentielle sous la forme $\frac{dy}{dt} = \frac{x-\xi}{\eta-y}$ (ξ, η sont des polynômes), l'aut. identifie les expressions ξ, η aux coordonnées du point de la développée de la courbe intégrale, qui correspond au point (x, y) ; x, y étant ainsi des fonctions algébriques de (ξ, η) , l'aut. déduit des conditions (ξ, η) du troisième degré pour que les fonctions ne deviennent pas infinies pour des valeurs finies de ξ, η ; il affirme que si l'équation différentielle a toutes ses solutions au voisinage de l'origine bornées, ces conditions sont vérifiées. Or l'identification mentionnée est illégitime; par suite le critère est faux, comme le montre l'exemple suivant: $\xi = x^2 + (x+y)^3$, $\eta = y^2 + (x+y)^3$, les conditions ne sont pas vérifiées, et les intégrales $x^2 + y^2 - \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - \frac{1}{4}(x+y)^4 = C$ au voisinage de l'origine sont bornées.

W. Stepanoff (Moskau).

Russyan, C.: Ableitung des Integrals von Cauchy der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung aus dem vollständigen Integrale derselben mittelst der Variation der willkürlichen Konstanten. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 53—60 (1934).

Von der partiellen Differentialgleichung $F(z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}, z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ sei das vollständige Integral $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_n)$ bekannt. Aus ihm wird diejenige Lösung $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bestimmt, die für $x_1 = x^0$ der vorgegebenen Funktion $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ gleich wird. *Rellich* (Marburg, Lahn).

Drinfeld, G. I.: Généralisation d'un procédé pour construire des invariants absolus intégraux des ordres supérieurs. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 1, 85—90 (1933) [Ukrainisch].

Drinfeld, G. I.: Construction des invariants intégraux absolus des ordres 0, 1, 2, ... ($p - 1$), à l'aide de fonctions contravariantes d'après l'invariant absolu intégral donné de l'ordre p . J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 49—58 (1934) [Ukrainisch].

Verallgemeinerung einiger bekannten Methoden für die Konstruktion der absoluten Integralinvarianten von höheren Ordnungen für das System

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt; \quad X_i \equiv X_i(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Janczewski (Leningrad).

Pfeiffer, G.: Sur la possibilité de construire par combinaison linéaire des équations d'un système Jacobien contenant les paramètres, des systèmes Jacobiens, qui ne contiennent pas tel nombre de paramètres, auquel est diminué le nombre des équations. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 1, 41—68 (1933) [Ukrainisch].

Vgl. dies. Zbl. 7, 65.

Pfeiffer, G.: Sur la possibilité d'exprimer les fonctions contenant les paramètres par certains ou tous les paramètres et par les fonctions ne contenant pas de paramètres séparés, avec une augmentation du nombre des fonctions au nombre des paramètres séparés. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 1, 69—84 (1933) [Ukrainisch].

Viele Beispiele und Einzelfälle für die Theoreme des Verf. (vgl. dies. Zbl. 7, 404; 8, 202).

Janczewski (Leningrad).

Pfeiffer, G. V.: Sur les fonctions contravariantes du deuxième et troisième ordre. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 3—14 (1934) [Ukrainisch].

In den früheren Abhandlungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. 8, 314; 9, 67) wurden die kontravarianten Funktionen erster Ordnung des Systems

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n} = dt$$

aufgebaut. Jetzt gibt der Verf. eine neue Methode für die Konstruktion der kontravarianten Funktionen zweiter und dritter Ordnung. *Janczewski* (Leningrad).

Nicolaenco, Marie: Systèmes conoidales des courbes intégrales de l'équation de Pfaff. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 45—48 (1934).

Die einparametrischen Lösungen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ einer Pfaffschen Gleichung $P dx + Q dy + R dz = 0$ werden als rechtwinklige Koordinaten einer Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raume (R_3) angesehen. Auf das auf diese Weise im R_3 definierte Kurvensystem kann man bekanntlich (vgl. dies. Zbl. 4, 418) weitgehend Begriffe der Flächentheorie, wie z. B. Asymptotenrichtungen, Krümmungsrichtungen, die Gaußsche und die mittlere Krümmung usw. übertragen. In der vorliegenden Arbeit wird nun die spezielle Pfaffsche Gleichung $y dx - x dy + R dz = 0$ betrachtet und an sie die Bedingung gestellt, daß die mittlere Krümmung des entsprechenden Kurvensystems im R_3 in jedem Punkte des Raumes gleich Null sein soll. Es zeigt sich, daß alle dieser Bedingung genügenden Funktionen R leicht bestimmt werden können; z. B. $R = f(x^2 + y^2)$, wo f willkürlich ist. *O. Borůvka* (Brno).

Schauder, J.: Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen. *Studia Math.* 5, 34—42 (1935).

Verfeinert einige Abschätzungen der Abhandlung des Verf. „Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ [*Math. Z.* 38, 257—282; dies. Zbl. 8, 255]; als Spezialfall wird ein Resultat von Cacciopoli (*Rend. Acc. Lincei* 19, 83—89; dies. Zbl. 9, 68) diskutiert.

Hans Lewy (Providence).

Golusin, G. M.: Auflösung einiger ebenen Grundaufgaben der mathematischen Physik im Fall der Laplaceschen Gleichung und mehrfach zusammenhängender Gebiete, die durch Kreise begrenzt sind. *Rec. math. Moscou* 41, 246—276 u. dtsh. Zusammenfassung 276 (1934) [Russisch].

Es sei zuerst eine außerhalb der Kreise $C_1 \dots C_n$ ($C_k: |z - a_k| = R_k$) harmonische Funktion U gesucht ($U(\infty)$ endlich), welche auf C_k gegebene stetige Werte f_k annimmt.

Hier ist $U = Re \psi(z)$, wobei $\psi(z) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(z) + \sum_{k=1}^n A_k \log(z - a_k) + A$ und φ_k eindeutig und regulär außer C_k ist. Die Randbedingungen können jetzt in der Form

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{U dz'}{z' - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f_k dz'}{z' - z}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{U dz'}{z' - a_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{f_k dz'}{z' - a_k}$$

geschrieben sein und nachher zur Gestalt

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_k(z) + \lambda \sum_{m=1(m \neq k)}^n \left[\varphi_m \left(\bar{a}_k + \frac{R_k^2}{z - a_k} \right) - \overline{\varphi_m(a_k)} \right] = F_k(z; A_1 \dots A_n), \quad (*) \\ \sum_{m=1(m \neq k)}^n Re \varphi_m(a_k) = B_k(A, A_1 \dots A_n) \quad (k = 1, \dots, n; \lambda = 1) \quad (**) \end{array} \right.$$

transformiert werden. $F_k(z)$, B_k sind hier bekannte Funktionen. Die Aufgabe ist also auf die Auflösung des Systems von Funktionalgleichungen (*) zurückgeführt. Die Lösung dieses Systems gelingt in expliziter Form durch sukzessive Approximationen, die Zahlen A_k werden nachher ausgerechnet. Es werden noch die Neumannsche und einige ähnliche Probleme für die Laplacesche Gleichung und für Gebiete der oben genannten Art (mit Hilfe derselben Methode der Zerteilung von Singularitäten der gesuchten analytischen Funktion) aufgelöst. Als Anwendung werden endlich noch Lösungen von folgenden Aufgaben gegeben: die Bestimmung der Greenschen Funktion für die eben erwähnten Gebiete, die Bestimmung der Abbildungsfunktion bei der Transformation auf die geradlinig parallel zerschnittene Ebene, einige Aufgaben der Wärmeleitung, Hydrodynamik und Elastizitätstheorie. Analoge Methoden werden gegenwärtig vom Verf. auf einige noch allgemeinere Bereiche und kompliziertere Aufgaben für die Laplacesche Gleichung angewendet.

Janczewski (Leningrad).

Golusin, G. M.: Auflösung des dreidimensionalen Dirichletschen Problems für die Laplacesche Gleichung und Gebiete, die durch endlich viele Sphären ohne gemeinsame Punkte begrenzt sind. *Rec. math. Moscou* 41, 277—283 u. dtsh. Zusammenfassung 283 (1934) [Russisch].

Der Verf. gibt die Auflösung des genannten Problems durch Zurückführung auf ein System von Funktionalgleichungen, welche durch sukzessive Approximationen aufgelöst wurden. Die Methode ist analog derjenigen, die in der vorigen Abhandlung gebraucht wurde, nur sind hier nicht reguläre komplexe, sondern nur harmonische reelle Funktionen benutzt. Der Verf. gibt noch eine alternative Approximation zur Auflösung desselben Problems für einige Gebiete, deren Grenzen aus endlich vielen allgemeineren Flächen ohne gemeinsame Punkte bestehen.

Janczewski (Leningrad).

Sobrero, Luigi: Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata. *Ric. Ingegn.* 2, 255—264 (1934).

In früheren Mitteilungen [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.* 6 (1934); dies. Zbl. 8, 395 und 9, 112; für den math. Teil vom Standpunkt der Algebra vgl. auch G. Scorza,

ebendasselbst, dies. Zbl. 9, 242] wurde gezeigt, wie man Aufgaben über ebene elastische Systeme als Aufgaben über gewisse hyperkomplexe Funktionen interpretieren kann, ähnlich, wie man Probleme der Elektrostatik funktionentheoretisch behandelt. Diese Theorie wird von neuem ausführlich dargestellt, und als Beispiel für die Anwendbarkeit wird die Veränderung in einem elastischen System behandelt, die durch das Einsetzen einer kreisförmigen Platte verursacht wird. Es ergeben sich die Formeln von Kirsch [Z. Ver. Deutsch. Ing. 42, 797 (1898)] in einfacherer Weise. *Feller* (Stockholm).

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliùboff: L'application des méthodes de la mécanique non linéaire à la théorie des perturbations des systèmes canoniques. Monogr. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 1—55 (1934).

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliùboff: Les méthodes symboliques de la mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de la résonance dans l'oscillateur. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 1, 7—32 u. franz. Zusammenfassung 33—34 (1934) [Russisch].

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliùboff: Les méthodes de la mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires. Monogr. Acad. Sci. Ukraine Nr 8, 1—99 u. franz. Zusammenfassung 100—109 (1934) [Russisch].

Arbeit 1 behandelt konservative mechanische Systeme mit einem Freiheitsgrad, deren Hamiltonsche Funktion von der Form $H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q, t)$ ist. Dabei ist ε ein kleiner Parameter, die Störungsfunktion H_1 periodisch in t mit Frequenz α , und es wird außerdem vorausgesetzt, daß das ungestörte System nur periodische Lösungen hat, deren Frequenz von der Energie abhängt. Dann werden durch Einführung kanonischer Koordinaten J (= Arbeit über eine Periode) und w (= zyklische Koordinate) die Bewegungsgleichungen auf die Form gebracht:

$$\frac{dJ}{dt} = -\varepsilon \frac{\partial L(J, w, t)}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dt} = \omega + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial J}, \quad (1)$$

wo ω ein innerhalb der Grenzen $\pm \varepsilon$ willkürlicher Näherungswert der ungestörten Frequenz $H'_0(J_0)$ [J_0 Anfangswert] ist. Die Arbeit beschäftigt sich zuerst mit der Aufstellung formaler, nach Potenzen von ε fortschreitender, von säkularen Gliedern freier Entwicklungen für J und w . Es werden zwei Methoden gegeben: 1. Da ω und α als inkommensurabel vorausgesetzt werden können, tritt formal keine Resonanzschwierigkeit auf, und es existieren formale Entwicklungen, die p und q als periodische Funktionen mit 2 Frequenzen, α und $\omega_\varepsilon = \omega + \nu_1 \varepsilon + \dots$, erscheinen lassen. Diese Entwicklungen entsprechen den in der Astronomie üblichen und sind, wenn ω in der Nähe eines Resonanzwertes liegt, wegen kleiner Nenner im allgemeinen auch zur asymptotischen Berechnung (bei kleinen ε) ungeeignet. 2. Liegt die ungestörte Frequenz in der Nähe eines Resonanzwertes $m\alpha/n$, so wird ω gleich diesem Wert genommen und werden Entwicklungen mit der Frequenz α/n angesetzt. Die erhaltenen Reihen haben wieder die Form von periodischen Funktionen mit zwei Frequenzen $m\alpha/n$ und ω_ε (Konvergenzfragen werden nicht berührt). — Weiterhin wird das Verhalten der 1. Näherung (von Methode 2) in der Nähe eines Resonanzwertes untersucht. Die Winkelkoordinate hat dann die Form $w = m\alpha/n \cdot t + \theta(t)$, und über die (bei kleinem ε) „langsam veränderliche“ Phase θ wird folgendes bewiesen: Es existiert, unter einer sogleich anzugebenden Voraussetzung über H_0 , um den Resonanzwert $m\alpha/n$ ein bestimmtes Intervall von der Größenordnung $\sqrt{\varepsilon}$ von folgender Art: Liegt die ungestörte Frequenz $H'_0(J_0)$ in seinem Äußeren, so wächst die Phase θ mit t ins Unendliche, und zwar mit einer mittleren Wachstumsgeschwindigkeit von der Größenordnung $\sqrt{\varepsilon}$; liegt $H'_0(J_0)$ in seinem Inneren, dann schwankt θ zwischen endlichen Grenzen. Dieses Verhalten ist wesentlich gebunden an die Nichtlinearität des ungestörten Problems ($H''_0(J_0) \neq 0$). Für den Fall sinusförmigen H_1 wird die Untersuchung noch verfeinert.

Arbeit 2 wendet diese Integrationsmethoden auf die elektrotechnische Aufgabe der Berechnung eines Röhrensenders von nichtlinearer Charakteristik an. Mit der symbolischen Bezeichnung $\omega = -i \frac{d}{dt}$ handelt es sich um die Integration einer Differentialgleichung der Form

$$(\omega^2 - \omega_0^2) u = i\varepsilon \gamma(\omega) \{x(\omega) u - x_0 F(E + u)\}, \quad (2)$$

wo ε ein kleiner Parameter, $\gamma(\omega)$ ein ungerades, $x(\omega)$ ein gerades Polynom (bzw. eine rationale Funktion von besonderen Eigenschaften) ist, E die äußere Spannung von der Form $E_0 + a \cos \alpha t$, F eine gegebene Funktion (die Charakteristik), u die gesuchte Spannung, und wo die Eigenfrequenz ω_0 im Resonanzfall $= \alpha/n$ ist. Die erste Näherung wird im Resonanzfall diskutiert, und mit Hilfe einer interessanten geometrischen Veranschaulichung gezeigt, daß sich in dieser Näherung jede Schwingung mit der Zeit einer stationären nähert, deren Amplitude und Phase berechnet werden.

Arbeit 3 behandelt in ihrem ersten Teil die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \quad (3)$$

wobei f ein Polynom in $\sin t$, $\cos t$, x , \dot{x} und nach ε in Potenzreihe entwickelbar ist. Zuerst werden in einer gegenüber 1. vereinfachten Darstellung im Falle der Nichtresonanz (ω irrational) formale nach Potenzen von ε fortschreitende Entwicklungen angesetzt. Dann aber werden speziell die quasistationären Lösungen untersucht und dabei ein sehr bedeutender Fortschritt gegenüber den früheren Arbeiten erzielt. Bezeichnet man nämlich mit a die Amplitude der Schwingung ($x = a \sin \theta$, $\dot{x} = \omega a \cos \theta$), so genügt a in nullter Näherung einer Gleichung $da/dt = F(a)$ (F Polynom), und eine stationäre Lösung kann nur eintreten, wenn F reelle Nullstellen hat. Man wähle also den Anfangswert a_0 als Nullstelle von F und setze diese außerdem als einfach voraus. Dann wird gezeigt: 1. In erster Näherung wird x eine Funktion mit zwei Perioden: $x(t, \nu t)$, wobei $\nu = \omega + b\varepsilon$, und also reinperiodisch oder fastperiodisch, je nachdem ν rational oder irrational ist. Die Integrale, deren Anfangswerte in genügender Nähe von a_0 liegen, nähern sich asymptotisch einem $x(t, \nu t)$. 2. Es werden auf direktem Wege die Lösungen von (3) studiert, deren Anfangswerte in der Nähe von a_0 liegen, und festgestellt: Es gibt eine einparametrische Schar von der Form $x(t, \nu t)$ [$\nu = \nu(\varepsilon)$]. Alle übrigen Lösungen mit Anfangswerten nahe bei a_0 nähern sich asymptotisch einer solchen Lösung. Das heißt aber: die ersten Näherungen geben das Verhalten der exakten Lösungen qualitativ richtig wieder. Der Beweis von 2. ist schwierig, er benutzt in der Hauptsache folgenden Gedankengang: Man betrachte die Werte a_n, θ_n , die zu den Zeitwerten $2\pi n$ gehören. Es wird die Existenz einer bestimmten stetigen Kurve $a = a(\theta)$ nachgewiesen, so daß sämtliche Punkte a_n, θ_n auf ihr liegen, wenn der Anfangspunkt a_0, θ_0 darauf liegt. (Kryloff benutzt andere Variable, die hier der Kürze halber nicht eingeführt werden sollten.) Solchen Anfangspunkten entsprechen Lösungen der Form $x(t, \nu t)$. Zur Bestimmung von ν werden Sätze von Poincaré und Birkhoff herangezogen. — Entsprechende Untersuchungen werden anschließend auch für den Resonanzfall angestellt, und endlich wird in einem zweiten Teil ein System von zwei gekoppelten Schwingungen der Form (3) in gleicher Weise behandelt. Otto Blumenthal (Aachen).

Spezielle Funktionen:

Achyèsér, N.: Über eine Eigenschaft der „elliptischen“ Polynome. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 3—8 (1934).

Dans des travaux antérieurs (Bull. Acad. Sci. URSS 1932, 1163—1202; ce Zbl. 7, 8; 1933, 309—344, 499—536; ce Zbl. 7, 341, 342) l'auteur a construit au moyen des fonctions elliptiques les polynomes $Y_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$ qui s'écartent le moins de zéro dans deux intervalles $(-1, a)$, $(b, 1)$. Actuellement, en imposant à a et b de satisfaire à une relation arithmétique (qui fait correspondre à chaque valeur donnée de a des valeurs déterminées de b au nombre de $n-1$), il démontre que les mêmes polynomes réduisent au minimum la somme des intégrales

$$\int_{-1}^a Y_{ns}^2(x) q(x) dx + \int_b^1 Y_{ns}^2(x) q(x) dx, \text{ quel que soit l'entier } s = 1, 2, 3, \dots, \text{ où}$$

$$q(x) = \frac{|c-x|}{\sqrt{(1-x^2)(a-x)(b-x)}}, \text{ où } c \text{ est une constante bien déterminée dépendant de}$$

a et b . Ainsi, ce résultat présente une première extension aux polynomes orthogonaux dans deux intervalles d'une propriété fondamentale connue des polynomes orthogonaux dans un seul intervalle. S. Bernstein (Leningrad).

Bateman, H.: The polynomial $F_n(x)$. Ann. of Math., II. s. 35, 767—775 (1934).

Die im Tôhoku Math. J. 37, 23 (1933) (dies. Zbl. 7, 307) behandelten Polynome $F_n(x)$ definiert Verf. auf eine neue Weise durch die Bedingung, daß $F_n(it)$ $\text{sech}^2(\pi t/2)$ im wesentlichen die Fouriersche Transformierte von $\text{cosech } z \cdot Q_n(\coth z)$ sei. Weiter werden die Funktionen

$$\begin{aligned} P_{m,n}(\tanh z) &= \cosh z \cdot F_m(D) \text{sech } z \cdot P_n(\tanh z), \\ Q_{m,n}(\coth z) &= \sinh z \cdot F_m(D) \text{cosech } z \cdot Q_n(\coth z), \end{aligned} \quad D = \frac{d}{dz},$$

eingehend untersucht. Hier sind P_n und Q_n die Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art. Die Definition von F_n behält ihren Sinn, wenn n beliebig komplex mit positivem reellen Teil ist. Szegő (St. Louis, Mo.).

Bell, E. T.: On the power series for elliptic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 841—852 (1934).

Für die Potenzreihenentwicklung z. B. der elliptischen Funktion $\operatorname{cn} x$ findet man leicht, daß sie die Gestalt

$$\operatorname{cn} x = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s Q_s(k^2) \frac{x^{2s}}{(2s)!} \quad (1)$$

mit

$$Q_s(k^2) = \sum_{r=0}^{s-1} q_r(s) k^{2r} \quad (2)$$

haben muß, wo die $q_r(s)$ ganze Zahlen sind, deren Bestimmung ein bekanntes schwieriges Problem ist. Bestimmung heißt dabei: $q_r(s)$ soll bei festem r als Funktion von s durch bekannte elementare Funktionen von s ausgedrückt werden. Die meisten bisherigen Methoden folgerten aus dem System der drei Differentialgleichungen 1. Ordn. für $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{dn} x$ oder aus der Differentialgleichung 2. Ordn. für $\operatorname{cn} x$ Rekursionsformeln für die $q_r(s)$. Diese Rekursionsformeln haben aber den Nachteil, die unbekannten $q_r(s)$ nicht linear zu enthalten. Verf. entwickelt eine neue Methode, die unmittelbar zu linearen und also einfacheren Rekursionsformeln führt. Sein Ausgangspunkt ist die bekannte Fourierentwicklung der Funktion cn :

$$\partial_2^2 \operatorname{cn}(x \partial_3^2) = 4 \sum_m q^2 \left(\sum_{t|m} (-1)^{\frac{1}{2} \left(\frac{m}{t} - 1 \right)} \cos t x \right),$$

wo m die positiven ungeraden Zahlen durchläuft. Setzt man links den Ansatz (1), (2) ein, entwickelt rechts die einzelnen $\cos t x$ in ihre Potenzreihen und addiert diese gliedweise, so folgt durch Vergleich der Koeffizienten von x^{2s} auf beiden Seiten

$$\partial_2^2 \partial_3^4 Q_s(k^2) = 4 \sum_m q^2 \xi_{2s}(m), \quad (3)$$

wo $\xi_{2s}(m)$ die zahlentheoretische Funktion

$$\xi_{2s}(m) = \sum_{\substack{u+v=m \\ u \text{ ungerade}}} (-1)^{\frac{u-1}{2}} v^{2s}$$

bedeutet. In (3) wird sodann k^2 durch seine q -Entwicklung ($\sqrt{k} = \partial_2/\partial_3$) ersetzt und dann die linke Seite in ihre Potenzreihe nach $q^{\frac{1}{2}}$ entwickelt. Vergleich der Koeffizienten von q^2 auf beiden Seiten (hierin liegt das Neue; die älteren Methoden verglichen die Koeffizienten gleicher Potenzen von k^2 in ihren Formeln) liefert jetzt die erstrebte Rekursionsformel

$$\sum_{r=0}^{(m-1)/2} 2^{4r} N(2m, 4s+2, 4r+2) q_r(s) = \xi_{2s}(m) \quad (m = 1, 3, 5, \dots), \quad (4)$$

wo die $N(n, f, g)$ eine einfache zahlentheoretische Bedeutung haben, auf Grund derer sie sehr leicht zu berechnen sind. Mit Hilfe von (4) gewinnt Verf. explizite Formeln für $q_1(s)$, $q_2(s)$, $q_3(s)$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) und beweist dann allgemein, daß $q_j(s)$ die Form hat

$$2^{4j} q_j(s) = (2j+1)^s + A_1(s) (2j-1)^s + A_2(s) (2j-3)^s + \dots + A_j(s) 1^s,$$

wo $A_r(s)$ ein Polynom in s vom Grade r mit rationalen Koeffizienten ist. — In derselben Weise werden die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{dn} x$, $x/\operatorname{sn} x$, $x^2/\operatorname{sn}^2 x$ behandelt.

Bessel-Hagen (Bonn).

Mehrotra, Brij Mohan: Some inversion formulae. Proc. Benares Math. Soc. **15**, 1—20 (1933).

The author gives some inversion formulae generalizing results given by Bateman and Fox. The main results are that, when $f(s)$ satisfies certain conditions,

$$\int_{s=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} \{ J_{\lambda_1+1}(x-s) J_{\lambda_1-1}(x-t) + J_{\lambda_2}(x-s) J_{\lambda_2}(x-t) + J_{\lambda_2}(x-s) J_{\lambda_2}(x-t) + J_{\lambda_4-1}(x-s) J_{\lambda_4+1}(x-t) \} f(t) dt = 4 f(s)$$

when $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ are positive; and

$$\int_{s=-\infty}^{\infty} \int_{t=-\infty}^{\infty} [J_{\lambda+1}(x-s) J_{\lambda-1}(x-t) + J_{\lambda}(x-s) J_{\lambda}(x-t) + J_{\nu}(x-s) J_{\nu}(x-t) + J_{\nu-1}(x-s) J_{\nu+1}(x-t)] f(t) dt = 4 f(s)$$

where λ, ν are integers. From these two theorems numerous inversion formulae are derived as particular cases. For example, if

$$F(x) = \nu \int_{-\infty}^x \frac{J_{\nu}(x-t)}{x-t} f(t) dt, \quad \text{then} \quad f(s) = \nu \int_s^{\infty} \frac{J_{\nu}(x-s)}{x-s} F(x) dx.$$

W. N. Bailey (Manchester).

Kober, Hermann: Transformationsformeln gewisser Besselscher Reihen, Beziehungen zu Zeta-Funktionen. Math. Z. 39, 609—624 (1935).

In this paper certain formulae given recently by Watson and Doetsch are generalized. For example, it is proved that, under certain conditions,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_{\nu} \{2\pi u(n+\alpha)\} (n+\alpha)^{\nu} e^{2\pi i \beta(n+\alpha)} = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) u^{\nu}}{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \alpha n}}{\{(n+\beta)^2 + u^2\}^{\nu+\frac{1}{2}}},$$

and

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_{\nu} \{2\pi x(n+\alpha)\}}{(n+\alpha)^{\nu}} e^{2\pi i \beta(n+\alpha)} = \frac{x^{-\nu} \pi^{\nu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sum_{|n+\beta| < x} e^{-2\pi i \alpha n} \{x^2 - (n+\beta)^2\}^{\nu-\frac{1}{2}}.$$

Some reciprocal functions are given, and doubly infinite series considered. One result obtained is

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \binom{m_1}{m_2}^w K_w(2\pi u m_1 m_2) \cos 2\pi v m_1 m_2 + \frac{1}{4} u^{-w} \frac{\Gamma(w)}{\pi^w} \zeta(2w) + \frac{1}{4} u^w \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{\pi^{w+\frac{1}{2}}} \zeta(2w+1) = u^{-\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{w}{2} + \frac{1}{4}} \frac{\Gamma(w+\frac{1}{2})}{8\pi^{w+\frac{1}{2}}} \sum' (a m_1^2 + 2b m_1 m_2 + c m_2^2)^{-w-\frac{1}{2}}$$

where $v = b/a$, $u^2 + v^2 = c/a$, $\Delta = b^2 - ac$.

W. N. Bailey (Manchester).

Thielman, H. P.: Note on the use of fractional integration of Bessel functions. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 695—698 (1934).

This paper is based upon one by W. O. Pennell (see this Zbl. 4, 58) in which known expansions in sines and cosines are converted into expansions in Bessel functions and expansions in Bessel functions are converted into trigonometric series by the process of term by term fractional differentiation and integration. Noting the identity,

$$p^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{2\nu}(2ax^{\frac{1}{2}}) = \pi^{\frac{1}{2}} J_{\nu}^2(ax^{\frac{1}{2}}), \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad p = d/dx,$$

the author derives several expansions in squares of Bessel functions by fractionally integrating known expansions in Bessel functions. In particular, he derives from the

series, $x^{-\frac{1}{2}} f(x^{\frac{1}{2}}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-\frac{1}{2}} J_{\nu}(j_n x^{\frac{1}{2}})$, $a_n = [2/J_{\nu+1}^2(j_n)] \int_0^1 f(t) J_{\nu}(j_n t) dt$, j_n the n -th positive root of $J_{\nu}(x) = 0$, the expansion: $p^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} f(x^{\frac{1}{2}}) = \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_{\nu/2}^2(\frac{1}{2} j_n x^{\frac{1}{2}})$.

H. T. Davis (Bloomington, Indiana).

Wright, E. Maitland: The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. Proc. London Math. Soc., II. s. 38, 257—270 (1934).

In dieser Arbeit wird die folgende Verallgemeinerung der Besselschen Funktionen betrachtet:

$$\Phi(z) = \Phi(\varrho, \beta; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{\Gamma(l+1) \Gamma(\varrho l + \beta)}$$

(für $\varrho = 1$ ist $J_{\beta-1}(t) = (\frac{1}{2}t)^{\beta-1} \Phi(-\frac{1}{4}t^2)$). ϱ ist reell, >0 , β beliebig reell oder komplex. Es handelt sich um die asymptotische Entwicklung von $\Phi(z)$ für große

Werte von z . Dazu benutzt der Verf. die Methode der Sattelpunkte. Die gesuchte asymptotische Entwicklung wird vollständig geliefert durch:

Satz 1: Für $\arg(-z) = \xi$; $|\xi| \leq \pi$

$$Z_1 = (\varrho |z|)^{\frac{1}{e+1}} e^{\frac{i(\xi+\pi)}{e+1}}; \quad Z_2 = (\varrho |z|)^{\frac{1}{e+1}} e^{\frac{i(\xi-\pi)}{e+1}} \quad \text{ist} \quad \Phi(z) = H(Z_1) + H(Z_2),$$

wo:

$$H(Z) = Z^{\left(\frac{1}{2}-\beta\right)} e^{\left(1+\frac{1}{\varrho}\right)Z} \left\{ \sum_{m=0}^M \frac{(-1)^m a_m}{Z^m} + O\left(\frac{1}{|Z|^{M+1}}\right) \right\}.$$

Hieraus folgt der einfachere, jedoch weniger vollständige Satz:

Satz 2: Für $\arg z = \theta$, $\varepsilon > 0$, $|\theta| \leq \pi - \varepsilon$ und $Z = (\varrho |z|)^{\frac{1}{e+1}} e^{\frac{i\theta}{e+1}}$ ist $\Phi(z) = H(Z)$. Die Entwicklungskoeffizienten a_m sind die Koeffizienten v^{2m} in der Entwicklung von

$$\frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{2\pi} \left(\frac{2}{\varrho + 1} \right)^{m+\frac{1}{2}} (1-v)^{-\beta} \{g(v)\}^{-2m-1}$$

nach aufsteigenden Potenzen von v , mit $g(v) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\Gamma(\varrho + k + 2) v^k}{\Gamma(\varrho + 2) \cdot (k+2)!} \right\}^{\frac{1}{2}}$.

S. C. van Veen (Dordrecht).

Shabde, N. G.: On some definite integrals involving Legendre functions. *Philos. Mag.*, VII. s. 18, 1158—1160 (1934).

Continuing the work of a previous paper (this Zbl. 8, 396) the author evaluates the integrals

$$\int_{-1}^1 P_p(\mu) P_q(\mu) Q_n(\mu) d\mu, \quad \int_0^1 P_p(\mu) P_q(\mu) Q_n(\mu) d\mu$$

for positive integral values of p and q , the number n not necessarily being an integer. He then uses an integral theorem of MacRobert to prove that

$$\int_0^{\infty} \lambda \sin \lambda \pi P_{\lambda-\frac{1}{2}}(-\cos \theta) \frac{d\lambda}{(m-\lambda+\frac{1}{2})(m+\lambda+\frac{1}{2})} \\ \times \left[\frac{4}{\pi^2} \sin m\pi \cos \lambda \pi \{ \psi(m+1) - \psi(\lambda + \frac{1}{2}) \} + \frac{2}{\pi} \cos(\lambda - m)\pi \right] d\lambda = P_m(\cos \theta),$$

provided that $-\frac{1}{2} < m < 0$ and $0 < \theta < \pi$.

W. N. Bailey (Manchester).

Gheorghiu, Gh. Th.: Fonctions métasphériques et leur extension. *Mathematica, Cluj* 10, 157—181 (1935).

The first part of this paper discusses properties of functions $A_n(x, \lambda)$ defined by the relation

$$\left[2x - \left(t + \frac{1}{t} \right) \right]^{\lambda} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n A_n(x, \lambda).$$

Many properties are established directly from this relation, such as recurrence formulae and integral representations. It is also shown that the Bessel coefficients are limiting cases of the functions $A_n(x, \lambda)$. Associated polynomials $R_n(y, \lambda)$ defined by the expansion

$$\frac{(2x)^{\lambda+1}}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x, \lambda) R_n(y, \lambda)$$

are considered, and recurrence formulae and integral representations of these functions are obtained. In the second part of the paper, corresponding results are obtained for functions of two variables $A_{m,n}(x, y; \lambda)$ defined by the relation

$$\left[4xy - 2y \left(t + \frac{1}{t} \right) - 2x \left(u + \frac{1}{u} \right) \right]^{\lambda} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^m u^n A_{m,n}(x, y; \lambda).$$

The function $A_m(x, y; \lambda)$ is seen to be expressible in terms of Appell's hypergeometric function of two variables F_4 , and also in terms of Appell's function F_2 . Associated polynomials $R_{m,n}(u, v; \lambda)$ for which

$$\frac{(4xy)^{\lambda+1}}{(u-x)(v-y)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n}(x, y; \lambda) R_{m,n}(u, v; \lambda)$$

are discussed. The integral representations of $A_{m,n}(x, y; \lambda)$ consist mainly of double integrals of elementary functions, but the function is also represented by a simple integral in which the integrand involves Bessel functions. W. N. Bailey.

Variationsrechnung:

Mammana, Gabriele: Sopra un criterio di sufficienza per un estremo nei problemi di calcolo delle variazioni. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 174—177 (1934).

Die Publikation einer Arbeit über den im Titel genannten Gegenstand in den Rend. Circ. mat. Palermo wird angekündigt und das (hier nur angedeutete) Resultat an dem Beispiel $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{y^n} \sqrt{1+y'^2} dx = \text{Min}$ ($n > 0$) erläutert. Rellich (Marburg, Lahn).

Tonelli, Leonida: Su una particolare questione di calcolo delle variazioni. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 205—209 (1934).

Si mostra come un recente risultato del Mammana sul minimo dell' integrale $\int y^m \sqrt{1+y'^2} dx$ segua facilmente sia dalla teoria classica sugli estremi relativi, sia dal metodo diretto per gli estremi assoluti sviluppato nei Fondamenti di Calcolo delle Variazioni di L. Tonelli. Autoreferat.

Reid, William T.: Analogues of the Jacobi condition for the problem of Mayer in the calculus of variations. Ann. of Math., II. s. 35, 836—848 (1934).

The author considers relations between certain analogues of the Jacobi condition for the problem of Mayer with variable end points. The first condition, given by Cope (Diss. Chicago 1927), is stated in terms of the characteristic values of a boundary value problem for a differential system. The second is that given by Hestenes, and is stated in terms of the characteristic numbers of a quadratic form involving a finite number of variables. The equivalence of the two conditions is shown to depend on the normality of the extremal arc on certain sub arcs. Without using the assumption of normality on sub arcs, the second condition is shown to be equivalent to the positiveness of the characteristic values of a modified boundary value problem. In the final section the author extends a theorem previously given by him [Amer. J. Math. 54, 769—790 (1932); this Zbl. 5, 299] which states the existence of infinitely many characteristic numbers for a type of boundary value problem, by removing an hypothesis closely related to the property of normality on every subarc. Graves.

Hirschfeld, H. O.: Über eine Transformation von Variations- und Randwertproblemen. S.-B. Berlin. math. Ges. 33, 110—122 (1934).

If B is a simply connected region and $f(x, y, u)$, $\varphi(x, y, u)$ are defined for (x, y) in B and all u , then the integral

$$I(u) = \iint_B [\varphi(x, y, u)(u_x^2 + u_y^2) + 2\int_0^u f(x, y, u) du] dx dy$$

has for its Euler-Lagrange equation

$$\varphi \Delta u = -\frac{1}{2} \varphi_u (u_x^2 + u_y^2) - \varphi_x u_x - \varphi_y u_y + f.$$

For a given set of boundary values $\Phi(x(s), y(s))$ on the boundary of B , this equation is solvable provided that (a) B , Φ , φ , f satisfy certain continuity conditions; (b) $\varphi > 0$; (c) there are numbers $u_1 < \min \Phi$, $u_2 > \max \Phi$ such that either $f(x, y, u_1) < 0$ or $f(x, y, u_1) \equiv f_u(x, y, u_1) \equiv 0$, and either $f(x, y, u_2) > 0$ or $f(x, y, u_2) = f_u(x, y, u_2) = 0$. Under these conditions the solution obtained gives a strong relative minimum to the integral $I(u)$. If $f = 0$, there is a solution which assumes maximum and minimum

values on the boundary of B ; and under stronger assumptions on φ , all solutions have this property. The theorems are proved by reduction to a theorem on integral equations due to Hammerstein (*Acta math.* 54, 118). McShane (Princeton).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Belardinelli, G.: Su una teoria astratta del calcolo delle probabilità. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 5, 418—434 (1934).

Es wird ein geometrisches Bild angegeben, das im Cantellischen Sinne [vgl. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 3, 257—265 (1932); dies. Zbl. 5, 365] die Wahrscheinlichkeiten von wiederholten Ziehungen aus einer Urne ohne Rücklegung der gezogenen Kugeln darstellt. Bruno de Finetti (Trieste).

Schulz, Günther: Zur Theorie des Galtonschen Brettes. *Z. Physik* 92, 747—754 (1934).

Un plan incliné (appareil de Galton) porte des obstacles disposés de telle sorte qu'ils forment les sommets d'un réseau triangulaire régulier. Une sphère roule sur le plan et elle traverse successivement n lignes horizontales d'obstacles. Si elle passe entre deux obstacles a, b d'une même ligne horizontale, il y a une probabilité p_1 qu'elle passe à droite de l'obstacle c de la ligne suivante le plus voisin de a et de b , et une probabilité p_2 pour qu'elle passe à gauche de c . La symétrie de l'appareil suggère l'hypothèse que ces deux probabilités soient égales chacune à $\frac{1}{2}$. On peut alors calculer le nombre moyen b de passages à droite et la valeur moyenne s^2 de $(m - b)^2$, m étant le nombre de passages à droite dans une expérience. La théorie classique des épreuves répétées donne $s^2 = \frac{n}{4}$; mais cette valeur est contredite par des expériences faites avec un appareil soigneusement construit ($n = 60$). On a observé qu'on ne peut pas prendre $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$; si la sphère passe à droite d'un obstacle, il y a une probabilité p_{00} pour qu'elle passe à droite du suivant, et une probabilité p_{01} pour qu'elle passe à gauche de ce dernier et on a $p_{00} > p_{01}$. Les passages successifs correspondent donc à une chaîne de Markoff; la théorie de Markoff donne (sous l'hypothèse que n soit infiniment grand) $n p_{01} (1 - p_{00}) \frac{1 + p_{00} - p_{01}}{(1 - p_{00} + p_{01})^3}$ pour s^2 ce qui s'accorde avec les expériences statistiques exécutées par l'auteur à l'Institut des mathématiques appliquées de l'Université de Berlin. B. Hostinsky (Brno).

Silberstein, L.: Triangle—probability problem in integers. *Philos. Mag.*, VII. s. 18, 1132—1134 (1934).

Die Note behandelt das arithmetische Analogon der bekannten Aufgabe: Ein Stab wird auf zufällige Weise in drei Teile gebrochen; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus diesen drei Teilen ein Dreieck gebildet werden kann? Die Lösung ergibt sich ganz elementar. Für große Zahlen erhält man im Limes die bekannte Lösung der erwähnten Aufgabe ($p = \frac{1}{4}$). A. Khintchine (Moskau).

Krishnaswami, G. V., and S. Venkatachari: On a representation of the coefficients of correlation, by the constants of a spherical triangle. *J. Annamalai Univ.* 3, 189 bis 193 (1934).

Wold, Herman: Sheppard's correction formulae in several variables. *Skand. Aktuarie Tidskr.* 17, 248—255 (1934).

Durch Übertragung auf mehrere Veränderliche der früher entwickelten Methode [*Giorn. Ist. Ital. Attuari* 5 (1934); dies. Zbl. 9, 359] gelangt Verf. zu einer vollständigen Formelsammlung für die Sheppardsche Korrektur bei zwei Variablen. Es zeigt sich, daß die Korrektur für alle stetigen Verteilungen gültig ist. Die Korrekturen der Semi-Invarianten sind von der Variablenanzahl und der Frequenzverteilung unabhängig und verschwinden für alle gemischten Glieder. Willy Feller (Stockholm).

Darmois, G.: Sur la théorie des deux facteurs de Spearman. *C. R. Acad. Sci., Paris* 199, 1176—1178 (1934).

Dafür, daß bei einer n -dimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung die Variablen x_i in der Form $x_i = m^{(i)} \cdot g + s_i$ darstellbar sind ($m^{(i)}$ konstant, g und s_i unabhän-

gige Variablen), ist $E[e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)}] = \Phi(m^{(1)} u_1 + \dots + m^{(n)} u_n) \cdot \varphi_1(u_1) \dots \varphi_n(u_n)$ hinreichend, wobei E der Mittelwert und Φ, φ willkürliche Funktionen sind. Notwendig ist (nach der Normierung $E[g] = E[s_i] = 0$, $E[g^2] = 1$) u. a. $E[x_i x_k] = m^{(i)} \cdot m^{(k)}$. — C. Spearman schlägt solche Verteilungen für psychische Eignungsmasse x_i vor (Zweifaktorenhypothese 1904, vgl. auch dies. Zbl. 3, 164, Heywood). *H. Wold.*

Gumbel, E. J.: *La distribution finale des valeurs voisines de la médiane.* C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1174—1176 (1934).

Von einer zufälligen Variablen x mit der Verteilungsfunktion $W(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx$ mögen N Beobachtungen vorliegen. Aus der leicht bestimmbaren Wahrscheinlichkeit $w_m(x) dx$, daß der „ m -te von oben“ zwischen x und $x + dx$ liege [vgl. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 965 (1933); dies. Zbl. 8, 25], ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für die zugehörige Dominante \tilde{u}_m (Mode). Der Verf. behandelt speziell den Fall der „Nachbarn der Mediane“, für die $\frac{N}{m} \sim \frac{1}{2}$ ist. Unter gewissen Voraussetzungen über $w(x)$ ergibt sich näherungsweise die Gleichung $W(\tilde{u}_m) = \frac{N-m}{N-1}$ und ferner, als Verallgemeinerung eines Resultates von Haag [C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1388 (1934)], für $w_m(x)$ bei großem N eine Gaußsche Verteilung. Analoge Resultate gelten für den „ m -ten Wert von unten“.

Lüneburg (Leiden).

Hagstroem, K.-G.: *Remarks on risk theory.* Skand. Aktuarie Tidskr. 17, 209 bis 247 (1934).

Um die Risikobewegung zu kennzeichnen, kann man zunächst den Versuch machen, sie durch die folgende Abstraktion zu approximieren: Die Beobachtungszeit sei in n gleiche Abschnitte geteilt, in jedem dieser Abschnitte trete nur eines der beiden Ereignisse E (Zahlung von s) und E' (Zahlung von 0), das erste mit der Häufigkeit p auf. Das entsprechende Urnenschema sei $U(n)$. Diese Abstraktion erweist sich für die Praxis zu eng, denn die Praxis des Versicherungsgeschäftes muß mit dem gleichzeitigen, mehrmaligen Auftreten der Ereignisse E (etwa k mal) rechnen; daher wird ein Urnenschema in der Weise konstruiert, daß der Auszahlung des Betrages ks eine Kugel mit der Bezeichnung k zugeordnet wird; nimmt man an, daß

$$\mathfrak{B}(E^k) = \binom{m}{k} \pi^k (1 - \pi)^{m-k} = \pi_k,$$

so heiße das Schema $U(n, m)$; ist $\mathfrak{B}(E^k) = \omega^k = \omega_k$, so werde die Bezeichnung $\bar{U}(n, m)$ gewählt. Die Schemen $U(n, \infty)$, $\bar{U}(n, \infty)$ werden durch Grenzübergang ($m \rightarrow \infty$) erklärt, es ergibt sich bei $U(n, \infty)$: $\pi_k = p^k e^{-p}/k!$ und bei $\bar{U}(n, \infty)$: $\omega = p - 2p^2 + 5p^3 \dots$. Die Unabhängigkeit aufeinanderfolgender Ereignisse wird an einem modifizierten Schema untersucht; versteht man unter ξ die wahrscheinliche Zahl der Versicherungsfälle und bezeichne ν die Anzahl der Ereignisse, bei denen sich ξ einstellt, dann sei $P(\xi, \nu)$ die zugeordnete Wahrscheinlichkeit; die Risikothorie von Lundberg ergibt dann

$$P(\xi, \nu) = \xi^\nu e^{-\xi/\nu!},$$

woraus die Bedeutung des Schemas $U(n, \infty)$ erhellt, aber auch klar wird, daß die Einbeziehung der Größe ξ in das Urnenschema nötig ist. Die Untersuchung erfolgt an numerischen Beispielen. Legt man dem Urnenschema $W(n, m)$ das Gesetz von Pareto zugrunde, ($\mathfrak{B}(E^k) = \frac{\omega}{k^\alpha}$), so erhält man $\omega = \frac{p}{\zeta(\alpha-1)} [\zeta(x)$ Riemannsche Zetafunktion], sofern man das Schema $W(n, \infty)$ betrachtet. Schema $W(n, m)$ wird an Sonderfällen numerisch behandelt. Setzt man $t = \sum_{k \geq e} \xi^k e^{-\xi}/k!$ und definiert die Funktion $R(\xi, t)$ durch $R(\xi, t) = \frac{e}{\xi} - 1$, so ist die Bedeutung dieser Funktion im Zusammenhang mit $U(n, \infty)$ unmittelbar verständlich; da aber die tatsächliche Berechnung von $R(\xi, t)$ mit außerordentlichen Schwierigkeiten verbunden ist, wird als theoretische Risikoreserve $R(\xi_0, t_0)$ ein Wert vorgeschlagen, der sich für ein kleines ξ_0

und ein nicht zu kleines t_0 ergibt. Die Berechnungsvorschrift muß in der Originalarbeit eingesehen werden. F. Knoll (Wien).

Friedli, W.: Über den natürlichen Beharrungszustand bei einer Rentenkasse. Mitt. Vereinig. schweiz. Versch.-Math. H. 29, 1—20 (1934).

Der natürliche Beharrungszustand einer Rentenkasse liegt dann vor, wenn sich die Besetzungszahlen der einzelnen Jahrgänge zueinander verhalten wie die Zahlen der Ausscheideordnung. Der Neuzugang findet nur im Alter x statt. Der Verf. leitet interessante Beziehungen ab zwischen der Erneuerungszahl, Umfang des Bestandes und der mittleren Lebenserwartung. Für die Reserve einer Rentenkasse findet er die einfache Formel $Z = \frac{\alpha}{\delta} (\bar{e}_x - \bar{a}_x)$, wobei α die Erneuerungszahl ist, \bar{e}_x die mittlere Lebenserwartung der Neueintretenden und \bar{a}_x der Rentenbarwert ist. Seine Untersuchungen überträgt er noch auf eine Invalidenkasse. Für das Deckungskapital bekommt er wieder eine sehr einfache Formel

$$Z = \frac{\alpha}{\delta} \left[\bar{e}_x - \frac{\bar{a}_x}{\bar{a}_x^a} \bar{e}_x^a \right],$$

wobei \bar{e}_x^a und \bar{a}_x^a die entsprechenden Größen einer Aktivitätsordnung sind. — Zum Schluß betrachtet er noch das Deckungsverhältnis, d. h. das Verhältnis zwischen dem erforderlichen Deckungskapital und den Jahresausgaben, und das durchschnittliche Deckungskapital. Löer (Göttingen).

Loewy, A.: Ausbau der allgemeinen versicherungs-mathematischen Bezeichnungsweise, insbesondere für das Gebiet der finanziellen Maßnahmen in der Kranken- und Invalidenversicherung. Sonderdruck aus: Ber. d. 10. internat. Aktuarkongr., Rom 1934. 18 S.

Nijland, A. A.: Das empirische Fehlergesetz. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 37, 472—477 (1934).

Die an einigen Beispielen erläuterte Tatsache, daß empirische Fehlerverteilungen gegenüber der theoretischen Fehlerkurve oft eine zu große Häufigkeit der kleinsten und der größten Fehler aufweisen, läßt sich als Einfluß einer Veränderlichkeit des Präzisionsmaßes innerhalb des Fehlerkollektivs deuten. Wempe (Göttingen).

Numerische und graphische Methoden.

● **Riccardi, Goffredo:** Abachi per la risoluzione numerica die quazioni. Bologna: N. Zanichelli 1933. 12 S. L. 6.—.

Kreer, L.: Eine goniometrische Methode zur Ausrechnung der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen. Rec. math. Moscou 41, 317—331 u. dtsch. Zusammenfassung 331 (1934) [Russisch].

Nach kurzer historischer Einleitung behandelt der Verf. die dreigliedrigen Polynomgleichungen, und zwar durch Vergleich mit der trigonometrischen Identität $\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1$. Die zu lösende Gleichung erweist sich als gleichwertig mit der transzendenten Gleichung $(h + \log \tan \alpha) : \log \sec \alpha = k$ für α , in der h und k bekannt sind. Die transzendente Gleichung läßt sich von gewissen Ausgangswerten aus mit der Regula falsi verhältnismäßig leicht lösen. Zur Vereinfachung sind kleine Tafeln für $\log \tan \alpha / \log \sec \alpha$ und für $1 / \log \sec \alpha$ beigegeben. Bei größerer Gliederzahl verallgemeinert der Verf. so, daß er die Summe aller Gleichungsglieder $A_i x^{m_i}$ mit Ausnahme zweier dem Glied $\sec^2 \alpha$ der trigonometrischen Identität entsprechen läßt. Man wird auf $\log v_i = 2 k_i \log \tan \alpha - 2 \log \sec \alpha + h_i$ und $\sum_i v_i \operatorname{sign} A_i = 1$ (bekannt h_i, k_i , gesucht v_i, α) geführt. Da mit wachsender Gliederzahl immer mehr Fallunterscheidungen nötig werden, wird nur am Beispiel der viergliedrigen Gleichung vollständig gezeigt, wie man zur Lösung dieses Systems gelangen kann. Numerische Beispiele am Schluß zeigen, daß das vorgeschlagene Verfahren gut konvergiert. Zech.

Gutz, Al.: Une comparaison des différentes méthodes de quadrature par approximation. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 5, 12—18 (1934).

Bei Teilung des Integrationsweges in gleiche Teile legt Verf. Wert darauf, die Unterschiede zwischen den Näherungsausdrücken nach der Trapezregel, der Simpson-schen Regel und der Regel von Poncelet zu kennen, ohne diese Ausdrücke selbst berechnen zu müssen. Er findet, daß jene Unterschiede nur von den ersten und letzten drei Ordinaten abhängen.

R. Schmidt (Kiel).

Kantorovitch, L.: Sur le calcul approché de quelques types d'intégrales définies. Rec. math. Moscou 41, 235—244 u. franz. Zusammenfassung 245 (1934) [Russisch].

Es ist ungünstig, bestimmte Integrale über Funktionen mit Unendlichkeitsstellen durch mechanische Quadratur auszuwerten. Verf. schlägt vor, in solchen Fällen den Integranden in zwei Summanden zu zerspalten, von denen der eine die Unstetigkeit enthält, aber formelmäßig bequem integrierbar ist; das Integral über den anderen läßt sich dann oft leicht und genau durch mechanische Quadratur finden. Bei Integranden der Form $(x - x_1)^\alpha \cdot \varphi(x)$ mit genügend oft differenzierbarem $\varphi(x)$ und $\alpha > -1$ kann man den unstetigen Summanden gleich

$$(x - x_1)^\alpha \cdot \left[\varphi(x_1) + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!} \cdot (x - x_1)^{k-1} \right]$$

nehmen. Verf. behandelt in ähnlicher Weise Integranden der Form

$$(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_s)^{\alpha_s} \cdot \varphi(x) \quad \text{und} \quad (x - x_1)^\alpha \ln^p(x - x_1) \cdot \varphi(x),$$

allgemeiner $\varphi[\psi(x)]$, wo φ in 0 unendlich wird und ψ irgendwo im Integrationsintervall verschwindet. Für alle diese Fälle werden gute Beispiele durchgerechnet. Das Verfahren läßt sich auf numerische Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und von Integralgleichungen verallgemeinern (Beispiel: gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit unstetigem Störglied).

Th. Zech (Darmstadt).

Collatz, Lothar: Eine Verallgemeinerung des Differenzenverfahrens für Differentialgleichungen. (Hauptvers. d. Ges. f. Angew. Math. u. Mech., Bad Pyrmont, Sitzg. v. 9.—14. IX. 1934.) Z. angew. Math. Mech. 14, 350—351 (1934).

Bei den üblichen Näherungsverfahren, bei denen eine Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzt wird, erweist sich meistens selbst ein weitmaschiges Netz von Gitterpunkten als brauchbar zur Gewinnung einer rohen Annäherung. Doch wächst die Genauigkeit bei Vermehrung der Gitterpunkte meistens nur langsam an. Der Grundgedanke der neuen Verfahren, die der Verf. in Aussicht stellt, knüpft an die Formel

$$\frac{df}{dx} = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + h^4 \frac{\partial_1}{18} \left| \frac{d^5 f}{dx^5} \right|_{\max \text{ in } (x-2h, x+2h)},$$

$$|\partial_1| < 1,$$

während bei den bisher üblichen Verfahren die Abschätzungen ihren Ausgangspunkt von

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{h \partial_2}{2} \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{\max \text{ in } (x, x+h)}, \quad |\partial_2| \leq 1$$

nehmen. Der Umstand, daß in dem ersten Ausdruck h in der vierten Potenz vorkommt, läßt erwarten, daß mit der Vermehrung der Gitterpunkte rasche Konvergenz erzielt wird.

Funk (Prag).

Schaefer, H.: Angenäherte Berechnung des kleinsten Eigenwertes zusammengesetzter Systeme. (Hauptvers. d. Ges. f. Angew. Math. u. Mech., Bad Pyrmont, Sitzg. v. 9.—14. IX. 1934.) Z. angew. Math. Mech. 14, 367—368 (1934).

Es handelt sich um Differentialgleichungen von folgendem Typus

$$(py')' + (A_1 q_1 + A_2 q_2) y = 0.$$

Die Parameter A_1 und A_2 sind so festzulegen, daß die Lösungen gewissen Randbedingungen genügen. Die so erhaltenen Wertepaare A_1, A_2 bilden die „Eigenkurve“, für

die der Verf. die Gleichung der Tangente in einem gegebenen Punkt aufstellt. Im Fall $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$ werden für den kleinsten Eigenwert noch weitere Schlüsse auf Grund der Konvexitätseigenschaft der Eigenkurve gezogen. *Funk* (Prag).

Meisel, Benjamin: Praktisches Verfahren zur Summierung einiger Reihen mit gesichertem Genauigkeitsgrad. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 65—70 (1934).

Für Reihen mit positiven abnehmenden Gliedern $u(n_v)$, die sich als Werte einer Funktion $u(n)$ in äquidistanten Punkten n_v auffassen lassen, wobei $u''(n)$ nur endlich-viele Nullstellen haben darf, wird eine Integralformel gegeben, die zur näherungsweisen Summierung sowohl endlich- wie unendlichvieler Glieder praktisch anwendbar ist. Für die obere Grenze des Fehlers hat man einen bequemen Ausdruck. Einige Beispiele.

Nyström (Helsingfors).

Ward, Morgan: The numerical evaluation of a class of trigonometric series. Amer. Math. Monthly 41, 563—565 (1934).

„Wenn die trigonometrische Reihe $F(x) = \sum_1^\infty a_n e^{2\pi i n x}$ überall konvergiert und wenn die $(s+1)$ -ten Differenzen $\Delta^{s+1} a_\nu$ für alle $\nu \geq m$ gleiches Vorzeichen haben, dann ist

$$F(x) = \sum_1^m a_n e^{2\pi i n x} + \sum_{r=0}^{s-1} \Delta^r a_{m+1} \cdot \left(\frac{\csc \pi x}{2} \right)^{r+1} \cdot e^{2\pi i m x + \pi i (r+1)(x+\frac{1}{2})} + R$$

mit

$$|R| \leq 2 \left(\frac{\csc \pi x}{2} \right)^{s+1} \cdot |\Delta^s a_{m+1}|.$$

Bei den Reihen $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n^3}} \cos 2\pi n x$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n^3}} \sin 2\pi n x$, die der Verf. auszuwerten hatte (Entwerfen von Röntgenröhren), erhält man bereits mit $m=5$, $s=2$ die Fehlerabschätzung $|R| \leq 0,005$, während, wenn man die Reihen direkt mit der gleichen Genauigkeit summieren will, mehrere hundert Glieder erforderlich sind. *Schmidt*.

Lévy, M.: Nouvelle méthode d'analyse spectrale des courbes non périodiques. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1031—1033 (1934).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Madelung zur harmonischen Analyse einer beliebigen Kurve unter Anwendung der von ihm in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 9, 175) entwickelten Methode der selektiven Umbildungen. Einige der betreffenden Eigentümlichkeiten sind ohne Beweis angegeben. *Bossolasco* (Turin).

Abason, Ernest: Sur la méthode de Thompson et la méthode des discontinuités pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 5, 43—46 (1934).

Bei periodischen Funktionen aus Geradenstücken ohne Sprünge leitet Verf. den Eagleschen Korrekturfaktor für die angenäherten Fourierkoeffizienten ab, die sich bei Ersatz der Integralausdrücke durch Summen ergeben. *S. Gradstein* (Laren).

Budeanu, C.: Note sur la méthode d'analyse d'une fonction périodique basée sur les incidents géométriques de la courbe représentative. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 5, 39—42 (1934).

Zusammenstellung elementarer Formeln zur harmonischen Analyse. Kurzer Bericht über das Sprungstellenverfahren von Lalesco-Abason-Eagle. *Th. Zech*.

Geometrie.

Thébault, V.: Sur le cercle de Taylor. Gaz. mat. 40, 101—104 (1934).

Thébault, V.: Sur les bissectrices du triangle. Gaz. mat. 40, 145—148 (1934).

Goormaghtigh, R.: Sur des propriétés du triangle et du tétraèdre. Mathesis 48, 433—435 (1934).

Servais, Cl.: Sur la géométrie du tétraèdre. (XII. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 962—975 (1934).

Werenskiold, W.: Lineare Transformationen. Norsk mat. Tidsskr. 16, 119—123 (1934) [Norwegisch].

Explizite Berechnung der Hauptachsen derjenigen Ellipse, die aus dem Einheitskreis der Ebene durch eine affine Transformation hervorgeht. Fenchel (Kopenhagen).

Signorini, A.: Sul prodotto vettore. Boll. Un. Mat. Ital. 13, 267—269 (1934).

Richardson, L.: Application of vector formulae in spherical trigonometry. Amer. Math. Monthly 41, 619—624 (1934).

Mordoukhay-Boltovsky, D.: Sur les constructions dans l'espace Euclidien et non-Euclidien à l'aide de courbes algébriques. J. Cycle math. Acad. Sci. Ukraine 1, Fasc. 3, 15—30 (1934) [Ukrainisch].

Sintsoff, D. M.: Sur une extension d'un problème de Czuber sur les enveloppes. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 33—37 (1934).

Czuber hat [Arch. Math. Phys. (3) 2, 115—122 (1902)] die Gleichung der Enveloppe einer durch $x = \varphi(t, \alpha, \beta)$, $y = \psi(t, \alpha, \beta)$, $\omega(\alpha, \beta) = 0$ gegebenen ebenen Kurvenschar aufgestellt. Hierbei ist t Parameter auf der einzelnen Kurve, und α und β sind durch die Gleichung $\omega = 0$ verknüpfte Scharparameter. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß ω auch von t abhängen darf. Die Enveloppengleichung besagt dann wie im Czuberschen Fall das Verschwinden der Funktionaldeterminante von φ, ψ, ω nach t, α, β . Ferner werden zwei räumliche Deutungen angegeben. W. Fenchel.

Mirguet, Jean: Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre. Ann. École norm., III. s. 51, 201—244 (1934).

Ist der Satz des Verf., daß die Paratingens einer Fläche eben, d. h. die Tangentialebene stetig ist, wenn die Paratingens in keinem Flächenpunkte innere Elemente enthält [bisher publiziert: C. R. Acad. Sci., Paris 195 (1932) u. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 2 (1933); dies. Zbl. 5, 262 bzw. 6, 128], wird von neuem dargestellt, wobei von der Definition des Häufungspunktes an reichlich alle Hilfsmittel ab ovo entwickelt werden. Auch daß die Paratingens eines Kontinuums in jedem Punkte ein Kontinuum von Geraden ist, wird neu bewiesen. Die Beweise sind geometrisch und elementar. — Für spätere Zitierungen sei die neue Terminologie erwähnt: ein Kontinuum heißt Orthofläche (Orthokurve), wenn die Paratingens in jedem Punkte außerhalb (innerhalb) eines Rotationskegels liegt; in der üblichen Terminologie heißt z. B. das erstere: lokale Darstellbarkeit in der Form $z = f(x, y)$ mit beschränkten Differenzenquotienten von f . — Die früher eingeführte Begriffsbildung der Biparatingens einer Menge in einem Häufungspunkte M (= Häufungsmenge der Ebenen durch drei Mengenpunkte A, B, C , die unabhängig gegen M streben) wird als ungeeignet durch die „reduzierte Biparatingens“ ersetzt, indem man nur solche Dreiecke zuläßt, die auch in der Grenze nicht ausarten. Willy Feller (Stockholm).

Bouligand, Georges: Sur divers points de géométrie réglée. Ann. École norm., III. s. 51, 245—249 (1934).

1. Jedes Kontinuum von Geraden kann man auch als Kontinuum von orientierten Geraden auffassen und umgekehrt. 2. In jedem Punkte eines Kontinuums ist dessen Paratingens ein Kontinuum (ein anderer Beweis unter dem vorangehenden Ref.).

Willy Feller (Stockholm).

Algebraische Geometrie:

Kadeřávek, Fr.: Sur une surface Steinerienne du quatrième degré. Sonderdruck aus: Mém. Soc. Roy. sci. Bohême 7 S. u. franz. Zusammenfassung (1934) [Tschechisch].

Federigo, Enriques: Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero. Rend. Semin. mat. Fac. Sci. Univ. Roma, III. s. 1, Pt. 2, 7—190 (1934).

L'étude et la classification des surfaces irrégulières de genre géométrique nul

constituent essentiellement le sujet de ce bel exposé rédigé par L. Campedelli d'après les leçons professées par F. Enriques au Séminaire Mathématique de l'Université de Rome. Cet ouvrage forme une suite particulièrement intéressante aux *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* du même auteur (Padova 1932, X. Casa editrice Cedam; ce Zbl. 5, 409). Le premier chapitre est consacré à quelques préliminaires indispensables: invariant de Zeuthen-Segre, diverses relations numériques, plans multiples, détermination du nombre des modules d'une surface algébrique (régulière ou irrégulière). Au chapitre suivant figurent notamment deux théorèmes d'importance capitale pour la théorie: sur une surface irrégulière de genre géométrique p_g , de genre arithmétique p_a , tout système linéaire fait partie d'une série continue $\infty^{p_g - p_a}$ de systèmes linéaires non équivalents; — sur une surface irrégulière de genre géométrique $p_g = 0$ et de genre arithmétique $p_a = -p$ existe un faisceau irrationnel (K) dont le genre est égal à l'irrégularité p de la surface (F. Enriques, Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari; Rend. R. Accad. delle Sci. Istit. Bologna 1904—1905). Le dernier chapitre comprend une centaine de pages: bornons-nous à en indiquer les points qui paraissent les plus essentiels. Les surfaces pour lesquelles $p_g = 0$, $p_a < -1$ peuvent se ramener à des surfaces réglées. Il n'y a donc lieu de considérer que les surfaces pour lesquelles $p_g = 0$, $p_a = -1$: ces surfaces possèdent en dehors du faisceau elliptique (K) (de courbes de genre $\pi \geq 1$) un faisceau linéaire $|C|$ de courbes elliptiques sans points-bases, chaque courbe C et chaque courbe K ayant en commun un certain nombre n de points ($n =$ déterminant de la surface). Une telle surface F peut être représentée sur un cylindre elliptique n -uple $f(x, y) = 0$ avec une courbe de diramation composée de sections $z = C$ -te. Ces surfaces sont elliptiques, c'est à dire possèdent un groupe elliptique simplement infini de transformations en elles-mêmes. D'une manière plus générale, il existe pour toute valeur de p_g , des surfaces (elliptiques) possédant un groupe elliptique simplement ∞ de transformations birationnelles en elles-mêmes: elles ont toujours un genre arithmétique $p_a = -1$ et possèdent deux faisceaux de courbes: un, de genre p_g , formé de courbes elliptiques C , trajectoires du groupe; l'autre elliptique, formé de courbes K de genre $\pi \geq 0$ coupant les C en un certain nombre $n \geq 1$ de points. L'ouvrage se termine par la classification et la construction effective des surfaces elliptiques de genre géométrique nul suivant la méthode géométrique indiquée par l'Auteur lui-même [F. Enriques, Sulle superficie di genere zero. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 195 (1934); ce Zbl. 9, 125] et par la détermination des valeurs des plurigenres dans les différents cas obtenus. Terminons en soulignant le continuel souci de rigueur dont l'Auteur fait preuve et qui l'a conduit à des remarques critiques destinées à écarter les difficultés ou en les analysant, à servir de point de départ à de nouvelles recherches.

P. Dubreil (Nancy).

Godeaux, Lucien: Remarques sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 851—859 (1934).

L'Auteur reprend ici la classification des correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un, en complétant les résultats de ses mémoires: Sur les involutions appartenant à une surface de genres un (Ann. Ecole norm. 1914, 357; 1919, 51). Une correspondance $(1, n)$ entre deux surfaces Φ et F de genres un détermine sur F une involution engendrée, d'après un théorème de F. Enriques (Sulle trasformazioni delle superficie di genere uno. Rend. R. Accad. Bologna 1909—1910, 71), par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. Le problème posé est, en se limitant aux involutions cycliques d'ordre premier $p > 2$ sur la surface F , de trouver les valeurs possibles de p . L'Auteur montre qu'à côté de la valeur $p = 3$ obtenue dans ses travaux antérieurs, on peut en avoir d'autres, et construit effectivement une involution du type considéré et d'ordre égal à 5. *P. Dubreil* (Nancy).

Godeaux, Lucien: Sur une involution dont les couples de points appartiennent aux rayons d'un complexe linéaire. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 188—190 (1934).

Wenn das ∞^4 Linearsystem aller Flächen 4. Ordnung, die eine Kurve C^{10} mit dem Geschlecht 11 enthalten, einer Involution 2. Ordnung I_2 angehört, so ist I_2 diejenige von D. Montesano betrachtete Involution, für welche die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punktepaare einen linearen Strahlenkomplex bilden. *E. G. Togliatti.*

Godeaux, Lucien: Sur les involutions du second ordre de l'espace. IV. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 976—985 (1934).

Cuyppers, P.: Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3, 172—176 (1934).

Etude de la transformation birationnelle involutive obtenue en faisant correspondre à un point de l'espace le point conjugué par rapport à trois quadriques n'appartenant pas à un faisceau, dans le cas où les quadriques en question ont en commun sept points distincts et la tangente en l'un d'eux.

P. Dubreil (Nancy).

Burniat, Pol: Sur les transformations birationnelles de l'espace ayant deux points fondamentaux associés isolés. (II. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 887—901 (1934).

Suite du travail de même titre [Bull. Acad. roy. Belg., V. s. 20, 753—766 (1934); ce Zbl. 10, 78]. Etude détaillée des transformations T_1 et T_2 .

P. Dubreil.

Differentialgeometrie:

Feld, J. M.: Analytic curves for which the chord equals the arc. Amer. Math. Monthly 41, 543—546 (1934).

Beweis eines Satzes von Kasner [Bull. Amer. Math. Soc. 31, 214 (1925)], nach dem die analytischen Kurven in Minimalebene die einzigen analytischen Kurven sind, für die der zwei beliebige Kurvenpunkte verbindende Bogen gleich der entsprechenden Sehne ist.

E. A. Weiss (Bonn).

Beckmann, E. F.: A characteristic property of surfaces of negative curvature. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 761—768 (1934).

Let there be given a piece of surface S in a representation $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, such that $E = G$, $F = 0$, where E, F, G denote the first fundamental quantities. Such a representation is called typical, and the function $E = G$ will be denoted by λ . The Gauss curvature K is then given by the formula $K = -(\Delta \log \lambda)/2\lambda$. Hence, $K \leq 0$ if and only if $\log \lambda$ is subharmonic [see E. F. Beckmann and T. Radó, Subharmonic functions and surfaces of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933); this Zbl. 7, 130]. The present paper is concerned with the weaker assumption that λ is subharmonic. An example is given to show that surfaces with $K > 0$ might have some typical representation for which λ is subharmonic. On the other hand, it is shown that if λ is subharmonic for every typical representation, then $K \leq 0$, and conversely. Several interesting applications of this result are then considered.

Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Hedlund, Gustav A.: On the metrical transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature. Ann. of Math., II. s. 35, 787—808 (1934).

Ein ausführliches Referat dieser Arbeit ist bereits anlässlich der ihr vorausgegangen Note des Verf. in den Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20 gegeben worden (dies. Zbl. 9, 372).

E. Hopf (Watertown).

Blank, J.: Über Schattengrenzen auf den Flächen. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 8, 45—49 (1934).

Ist $d\sigma = \sqrt{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}$ das Linienelement des sphärischen Bildes einer beliebigen, nicht abwickelbaren Fläche F , so entsprechen den Schattengrenzen die Großkreise der Kugel und ergeben sich als die Extremalen des Variationsproblems $\delta \int d\sigma = 0$. Hieraus wird die Differentialgleichung der Schattengrenzen bei beliebiger Parameterwahl gewonnen. Sie kann zur Flächenbestimmung bei verschiedenen Annahmen über ihre Schattengrenzen herangezogen werden. Verf. zeigt:

1. Fallen die Schattengrenzen mit den geodätischen Linien von F zusammen, so ergibt sich als einzige Fläche die Kugel. 2. Da die Schattengrenzen gegenüber den affinen Transformationen des Raumes invariant sind, zeigt eine einfache affingeometrische Umformung ihrer Differentialgleichung, daß, falls sie mit den affingeodätischen Linien zusammenfallen, man zu den Flächen 2. Ordnung kommt. 3. Daraus läßt sich auch der Satz von Blaschke über Flächen mit ebenen Schattengrenzen herleiten. 4. Es werden in diesem Zusammenhang die Affinsphären gekennzeichnet und 5. die Flächen bestimmt, deren Darboux'sche Linien Schattengrenzen sind. 6. Besitzt F ein aus lauten Schattengrenzen bestehendes konjugiertes Netz, so charakterisiert diese Eigenschaft die Schiebungsflächen, deren Differentialgleichung in der Form von K. Reide-meister [Hambg. Abh. 1, 127—138 (1922)] elementar und ohne Benützung Beltrami-scher Differentialparameter aufgestellt wird. 7. Endlich werden noch die Flächen bestimmt, deren geodätische Kreise mit den bei zentraler Beleuchtung auftretenden Schattengrenzen zusammenfallen, was wieder die Kugeln charakterisiert [vgl. H. Liebmann, Math. Z. 13 (1922)].

M. Steck (Stuttgart).

Ricci, Giovanni: Sulla deformazione delle doppie infinità di sfere per flessione della superficie dei centri. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 93, 1535—1556 (1934).

Soit P une congruence de ∞^2 sphères, Σ , $\bar{\Sigma}$ — deux nappes de son enveloppe, S — la surface de centres. L'auteur examine: α) des congruences P dont il existe sur Σ , $\bar{\Sigma}$ deux familles de lignes (u, v) qui se coupent aux points homologues sous des angles égaux et conservent cette propriété pendant toutes les déformations de S ; β) le même problème pour les images sphériques de Σ , $\bar{\Sigma}$. — α) Si le réseau (u, v) est indéterminé, donc Σ , $\bar{\Sigma}$ sont en représentation conforme l'une sur l'autre, la congruence P est une congruence du théorème de Guichard (S est applicable sur un paraboloïde de révolution et les sphères de P viennent de passer par son foyer). Sinon, pour une forme particulière S_0 de S les sphères de P passent par un point fixe et le réseau (u, v) correspond aux asymptotiques de S_0 ou bien P est déterminé par deux équations qui relient le rayon de la sphère et les rayons de courbure principaux de Σ , $\bar{\Sigma}$. Les résultats semblables se trouvent au cas β). Application au problème de roulement d'une surface sur sa déformée.

S. Finikoff (Moscou).

Pantazi, Al.: Sur une classe de transformations de réseaux quadratiques à invariants égaux d'un espace à trois dimensions. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 16, 218 bis 222 (1934).

Etant donné dans un espace à 3 dim. un réseau quadratique à invariants égaux, M. Tzitzéica (Géométrie différentielle projective des réseaux, p. 97—105) a montré comment on peut déterminer un autre réseau quadratique à invariants égaux qui soit en même temps transformé de Koenigs-Moutard et de Ribaucour du réseau initial. L'auteur prouve que la transformation de M. Tzitzéica est caractérisée par la propriété de conserver les génératrices de la quadrique, à chaque génératrice correspondant une de même espèce. Il en résulte que les couples de réseaux de M. Tzitzéica s'obtiennent sans aucune quadrature.

Čech (Brno).

Bol, G.: Über Drei-Gewebe im vierdimensionalen Raum. (Topologische Fragen der Differentialgeometrie. LIX.) Math. Ann. 110, 431—463 (1934).

Drei Flächenscharen im R_4 werden durch zwei Funktionen $\varphi, \psi(u, v, a, b)$ so beschrieben, daß $(u, v) = \text{konst.}$ die erste, $(a, b) = \text{konst.}$ die zweite und $(\varphi, \psi) = \text{konst.}$ die dritte Schar darstellt. In T_{40} waren die Invarianten gegen Umparametrierung der ersten beiden Scharen studiert, hier wird $(\varphi, \psi) \rightarrow (\varphi^*(\varphi, \psi), \psi^*(\varphi, \psi))$ hinzugenommen; das gibt dann (unsymmetrisch) die Invariantentheorie des Gewebes. Man erklärt kontravariante 2-Vektoren durch das Beispiel

$$(\xi^I, \xi^{II}) = (\psi_u du + \psi_v dv, -\varphi_u du - \varphi_v dv),$$

analog ξ^{III} mit a und b , und dazu kovariante Differentiatoren $\mathcal{E}_I^I, \mathcal{E}_I^{II}$, deren Richtungen sich einfach geometrisch deuten lassen. Zum Indexversetzen benutzt man die schief-

symmetrische Tensordichte e_{ik} . Man erhält aus $(\mathcal{E}_i^I, \mathcal{E}_k^{II}) = A_{ik}^{::I}(\mathcal{E}_i^{II} - \mathcal{E}_k^{II})$ Dreiindizesymbole $A_{ik}^{::I}$, die in $B_i = A_{\rho i}^{\rho}$ und $A_{ik}^{::s} = (\mathcal{E}_s^I - \mathcal{E}_s^{II}) A_{ik}^{::I}$ Tensoren und nach dem Schema $p_{k,i}^I = \mathcal{E}_i^I p_k - A_{ik}^{::I} p_l$ eine kovariante Tensordifferentiation liefern. Das volle Invariantensystem besteht dann aus $B_i, A_{ik}^{::I}$ und deren kovarianten Ableitungen. — Das Gebilde erfüllt die Thomsenschen Gewebeaxiome, die Frage nach Bedingungen für die Sechseckkonfiguration S , die Reidemeister- (Quaderprojektions-) Konfiguration R und die Thomsensche Konfiguration Δ (Gewebehexsech mit drei großen Diagonalen im Gewebe) wird akut. S ist mit $A_{(i k l)}^{::m} = 0$ gleichwertig, R verlangt dazu genau $B_i = 0$ und ist, was das Beispiel $\varphi = (u+a)/(v+b)$; $\psi = (u-a)/(v-b)$ zeigt, keine Folge von S wie im Falle der Kurvengewebe; ebenso folgt Δ nicht aus R ($\varphi = v/(u+a)$, $\psi = b/(u+a)$), es besagt genau $A_{ikl}^{::m} = 0$ und ist mit Abbildbarkeit auf Ebenenbündel gleichwertig. Die aus reellen Kurvengewebe durch Komplexmachen entstehenden Flächengewebe lassen sich nur im Fall $B_i \neq 0$ leicht behandeln, $B_i = 0$ wird weitgehend diskutiert. Weiter kann man I - und II -Vektoren zu Vierervektoren zusammenfassen, die $A_{ik}^{::I}$ bestimmen eine Übertragung, deren Integrabilität Sechseckkonfiguration und Abbildbarkeit auf $\varphi = u+a$, $\psi = (b+v)(u+a)$ zur Folge hat.

Zorn (New Haven, Conn.).

Kaplan, Nathan: V_3 in R_6 of $(1, 2)_a$. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **20**, 574—576 (1934).

Fortsetzung der Arbeit desselben Verf. „ V_3 in R_6 “. [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 489—494 (1934); vgl. dies. Zbl. **9**, 327]. Hier wird der Fall untersucht, der durch die Bedingungen

$$e' f \quad e' \quad e' 1 \quad 1 \quad 6 \quad 6 \quad 2 \quad 2 \quad 7 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \left(\begin{array}{l} e' = 4, 5 \\ e, f = 4, 5, 6 \end{array} \right) \\ v_\lambda = 0, \quad h = h_{i\lambda} i_\mu, \quad h = h_{i\lambda} i_\mu + h_{i\lambda} i_\mu, \quad i_\lambda, i_\lambda, i_\lambda \perp \quad (1)$$

charakterisiert wird. Von zahlreichen angeführten Eigenschaften solcher V_3 sollen folgende erwähnt werden: Alle Punkte der V_3 sind planar (in bezug auf das Krümmungsgebilde), die orthogonalen Kongruenzen $i_\lambda, i_\lambda, i_\lambda$ sind zu zwei immer V_2 -bildend. Die Beweisführung der Behauptungen wird, wie in der ersten Note, mittels der Fundamentalgleichungen für eine V_3 in R_6 geführt.

Hlavatý (Praha).

Delens, Paul: Sur les congruences de courbes dans les variétés affines. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 1361—1363 (1934).

Aus $\nabla_\mu v^\nu = T_\mu^\nu$ kann man die Affinoren

$$L_{\lambda_1 \dots \lambda_{h-1}}^{\nu_1 \dots \nu_h} = v^{[\nu_1} T_{\lambda_1}^{\nu_2} T_{\lambda_2}^{\nu_3} \dots T_{\lambda_{h-1}}^{\nu_h]}$$

und daraus die Vektoren

$$v^\nu = L_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{h-1}}^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{h-1} \nu}$$

konstruieren. Diese sind in bezug auf die Transformation $*v^\nu = \lambda v^\nu$ relativ invariant

$$*v^\nu = \lambda^h v^\nu.$$

Die vollständige Lösung des Problems der eventuellen Abhängigkeit der Vektoren v^ν hängt von dem Hauptgebiet von T_μ^ν ab.

Hlavatý (Praha).

● **Delsarte, M.:** Sur les ds^2 d'Einstein à symétrie axiale. (Actualités scient. et industr. Nr. 157. Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. VI.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 28 S. Frs. 7.—.

The author considers space-times of the type $dS^2 = ds^2 + \varphi^2(du^4)^2$, where ds^2 is a quadratic differential form in three variables u^1, u^2, u^3 , and φ is a function of these three variables only. If u^4 is interpreted as a polar angle, dS^2 defines a space-time, in general non-static, having axial symmetry. The gravitational equations $R_{\mu\nu} = 0$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) reduce to $r_{ij} = \varphi^{-1} \varphi_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) and $\Delta_2 \varphi = 0$. Here r_{ij} is the Ricci tensor, φ_{ij} is the second covariant derivative of φ , and Δ_2 is the

Laplacian operator, all with respect to the space V_3 defined by ds^2 . — A V_3 satisfying these equations is such that the principal directions associated with the tensors r_{ij} , φ_{ij} are the same, but these directions do not in general determine a triply orthogonal system of surfaces and therefore do not necessarily define a natural reference-scheme. The general problem of determining spaces having such a natural reference-scheme is avoided by the author, who examines the case in which the Ricci principal directions (those associated with r_{ij}) are partially indeterminate. Special attention is given to a particular case. *H. S. Ruse (Edinburgh).*

Haimovici, M.: Sur quelques types de métriques de Finsler. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1091—1093 (1934).

The main results of this note are contained in the two theorems: 1. Let F_n be a Finsler space of n dimensions admitting ∞^{n-m} subspaces V_m such that every vector tangent to an V_m , when subjected to an arbitrary parallel displacement (in the sense of Cartan), remains tangent to the new V_m then there exists a coordinate system in which the metric of F_n has the form

$$ds^2 = \varphi(x^1, \dots, x^m; dx^1, \dots, dx^m) + \psi(x^{m+1}, \dots, x^n; dx^{m+1}, \dots, dx^n),$$

φ and ψ being homogeneous of the second degree in their differentials and the equations of V_m in this coordinate system being

$$x^{m+1} = \text{const}, \dots, x^n = \text{const}.$$

From the symmetry of ds^2 it is evident that this F_n admits ∞^m complimentary subspaces V_{n-m} having the same property their equations in the above coordinate system being

$$x^1 = \text{const}, \dots, x^m = \text{const}.$$

2. If in a Finsler space F_n there exists a congruence of curves which admits ∞^1 of hyperplanes V_{n-1} which are equidistant along the congruence and such that the tangents of the curves are parallel along any linear element of V_{n-1} , then

$$ds^2 = d(x^n)^2 + df dx^n + \varphi(x^1, \dots, x^{n-1}; dx^1, \dots, dx^{n-1})$$

where f is a function of x^1, \dots, x^{n-1} . The curves of the congruence have — in this coordinate system — the equations $x^1 = \text{const}, \dots, x^{n-1} = \text{const}$. *M. S. Knebelman.*

Hosokawa, Tôyomon: Connections in the manifold admitting contact transformations. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 2, 169—176 (1934).

Diese Arbeit ist eine Anwendung der Übertragungslehre auf eine Mannigfaltigkeit mit verallgemeinerten Transformationen, die der Verf. in Proc. Imp. Acad. Jap. 8, 348—351 (1932) (dies. Zbl. 6, 81) entwickelt hat. Als Transformationen werden hier Berührungstransformationen gewählt. Zwischen einem Vektor p_λ in einem Punkte $P(x_\lambda^0)$ und einem Vektor $p_\lambda + dp_\lambda$ in einem Punkte $(x_\lambda^0 + dx_\lambda)$ besteht dann die Gleichung

$$dp_\lambda = \omega_{\lambda\mu} dx^\mu, \quad \lambda = a_1, a_2, \dots, a_n,$$

wo die $\omega_{\lambda\mu}$ beliebige Funktionen der x^ν und p_λ sind. Die verwendeten Berührungstransformationen sind gegeben durch die Gleichung

$$'x^\nu = 'x^\nu(x^\lambda, p_\lambda); \quad 'p_\lambda = 'p_\lambda(x^\nu; p_\nu)$$

mit der Bedingung, daß der Ausdruck $p_\nu dx^\nu$ invariant bleibt. In bezug auf diese Transformationen werden Vektoren und Tensoren definiert. Dann werden eine Metrik und eine Übertragung mit Krümmungstensor eingeführt und die Beziehungen zu anderen Übertragungen ermittelt. *Struik (Haarlem, Holl.).*

Mechanik.

Werenskiöld, W.: Die Coriolis-Kraft. Norsk mat. Tidsskr. 16, 114—119 (1934) [Norwegisch].

Es werden die Gleichungen für relative Bewegung bezüglich eines um eine feste Achse gleichförmig rotierenden Systems aufgestellt. Als Anwendung wird die ebene Be-

wegung eines Massenpunktes relativ zu einer gleichförmig rotierenden Scheibe bestimmt, wenn die Zentrifugalkraft durch eine dem Abstand vom Zentrum proportionale Kraft kompensiert wird und sonst keine Kräfte wirken. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Consiglio, Alfonso: Su una dimostrazione vettoriale delle formule di Poisson. *Atti Ist. Veneto Sci. etc.* **93**, 1667—1669 (1934).

P sei ein Punkt eines starren Körpers, der sich um einen Punkt O dreht. Es wird rein vektoriell die Darstellung des Geschwindigkeitsvektors von P als Vektorprodukt des Ortsvektors \vec{OP} mit dem von P unabhängigen Drehungsvektor hergeleitet.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Sbrana, Francesco: Sulle condizioni di equilibrio per i solidi. *Boll. Un. Mat. Ital.* **13**, 271—272 (1934).

Le equazioni cardinali della Statica vengono dimostrate sufficienti per l'equilibrio di un solido (indipendentemente dal postulato caratteristico per i solidi) valendosi del principio della conservazione dell'energia. *Autoreferat.*

Wolkowitsch: Correspondance dualistique linéaire réciproque. *J. École polytechn.*, II. s. cahier **32**, 181—209 (1934).

Für eine Gruppe von Punktmassen m_i in den Abständen d_i von einer Ebene S sind durch die Gleichungen $\sum m_i d_i = (\sum m_i) d$ und $\sum (m_i d_i) d_i = (\sum m_i) \rho^2$ Mittelpunkte O und ω definiert. Dadurch ist auch eine dualistische Verwandtschaft zwischen den Punkten ω und den Ebenen S des Raumes festgelegt, bei der den Ebenen durch einen Punkt die Punkte einer Ebene, oder der Enveloppe 1. Grades von Ebenen ein Punktort 1. Grades entspricht. Da diese Verwandtschaft linear und reziprok ist, so gibt es eine quadratische Fläche, für die die Ebenen S und die Punkte ω Pol und Polare sind. Diese quadratische Fläche ist ein imaginäres Ellipsoid, da der Fall, daß ω in S liegt, ausgeschlossen wird. Das konjugierte reelle Ellipsoid ist die Enveloppe derjenigen Ebenen S , deren Entfernungen vom Schwerpunkt O gleich den zugehörigen Trägheitshalbmessern ρ sind. Dieses ist daher das Culmannsche Trägheitsellipsoid. Die Eigenschaften dieser Verwandtschaft werden eingehend untersucht. Anwendungen auf die Beziehungen zwischen den Drehachsen und Impulsachsen eines starren Körpers, auf die Schwingungen von schweren Körpern um feste Aufhängungsachsen, auf die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt und auf die Bohrrreibung eines starren Körpers auf einer waagrechten Ebene. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Wertheimer, Albert: A method of computing differential corrections for a trajectory. *J. Franklin Inst.* **217**, 729—742 (1934).

Moisseiev, N.: Sulle curve definite da un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine. I. Intorno ad un metodo di analisi qualitativa applicato ai problemi dinamici con due gradi di libertà. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **20**, 178—182 (1934).

Consider the two parameter family G of curves which satisfy the differential equations $\ddot{x} - 2n\dot{y} = W_x$, $\ddot{y} + 2n\dot{x} = W_y$, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2W + 2h$, where W is a function of the coordinates x and y , while n and h are constants (independent of the parameters as well as of x, y). Consider also an arbitrary one parameter family F of sensed curves such that through each point of the plane there passes just one curve of F . The author shows how the points P of the plane may be divided into regions according as the unique curve of G , tangent at P to the corresponding curve C of F in the positive sense (direct contact), lies to the right of C or lies to the left. A similar division into regions is obtained if the curve of G is taken to be tangent in the negative sense (retrograde contact). The work represents a generalization of the method of Hadamard [cf. *J. Math. pures appl.*, V. ser. **3**, 331 (1897)], who considered the reversible case $n = 0$.

D. C. Lewis (Princeton, N. J.).

Heinrich, Wladimír Wáclav: Sur la variation des arbitraires et certaines coordonnées normales de la dynamique. *Extrait de Mém. Soc. Roy. sci. Bohême* **1934**, 32 S.

Suppose that the Hamiltonian H of a dynamical system can be split into two

parts, $H = H_1 + H_2$, where the influence of H_2 is comparatively small, while the system associated with H_1 is conditionally periodic. The author studies such systems along ideas due originally to Delaunay and Epstein [cf. Z. Physik 8, 211 and 305 (1922)]. He enunciates two fundamental theorems, one of which is applied in effecting a considerable reduction in the long computations of Lagrange for the variation of the arbitrary constants for elliptic motion. The author also studies certain normal elements of a periodic solution. *Lewis (Princeton).*

Heinrich, Wladimír Wáclav: Recherches sur certaines coordonnées de la dynamique. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Nr 125, 1—20 (1934).

This work gives further applications of the fundamental theorems of a previous paper (see the prec. review). The first part gives a treatment of the canonical elliptic elements introduced by Levi-Civita [Ann. di Mat., ser. III 20, 153—169 (1913)]. The second part shows how Delaunay's successive operations in the well known lunar theory may be greatly shortened. *Lewis (Princeton).*

Heinrich, Wladimír Wáclav: Note sur la variation des arbitraires dans le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. Publ. Fac. Sci. Univ. Charles Nr 126, 1—12 (1934).

The author studies the problem indicated in the title from the point of view of the first fundamental theorem of a previous paper (see the prec. review). A system of canonical constants is obtained for the case that the three principal moments of inertia are equal. *Lewis (Princeton).*

Taylor, A. E.: On integral invariants of non-holonomic dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. 40, 735—742 (1934).

Für ein konservatives, nichtholonomes System von Bewegungsgleichungen wird eine relative Integralinvariante hergeleitet. Es wird ferner gezeigt, daß die Existenz dieser Integralinvariante auch hinreichend ist dafür, daß ein gegebenes System von Differentialgleichungen zu einem nichtholonomem dynamischen System der fraglichen Art gehört. In dem holonomen Fall gehen die Resultate in einen klassischen Satz über. *Wintner (Baltimore).*

Pontrjagin, L., A. Andronoff und A. Witt: Statistische Auffassung dynamischer Systeme. Physik. Z. Sowjetunion 6, 1—24 (1934).

Es seien

$$\frac{dx_i}{dt} = X^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Differentialgleichungen eines dynamischen Systems. Setzt man voraus, daß außer systematischen durch die Gleichungen (1) beschriebenen Änderungen des Zustandes unseres Systems noch zufällige Abweichungen von diesen systematischen Änderungen vorliegen, so wird man gezwungen, die Gleichungen (1) durch eine Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ verschiedener Zustände zu ersetzen. In mehreren Fällen ist es zweckmäßig, als solche Gleichung die folgende Fokker-Plancksche Gleichung zu wählen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (X^{(\alpha)} f) + \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (b^{\alpha\beta} f). \quad (2)$$

Eine stationäre (von t unabhängige) Wahrscheinlichkeitsdichte f genügt, offenbar, der Gleichung

$$0 = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (X^{(\alpha)} f) + \frac{\lambda}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (b^{\alpha\beta} f). \quad (3)$$

Die Hauptaufgabe der Verff. besteht in der Untersuchung des Verhaltens der Lösung f der Gleichung (3) bei $\lambda \rightarrow 0$, d. h. bei den unendlich-kleinen zufälligen Abweichungen von den dynamischen Bewegungsgleichungen (1). Entscheidende Resultate sind nur

für $n = 1$ und $n = 2$ erhalten. Im eindimensionalen Falle konzentriert sich im allgemeinen die Verteilung f bei $\lambda \rightarrow 0$ neben dem absoluten Maximum der Funktion

$$\psi(x) = 2 \int \frac{X(x)}{b(x)} dx.$$

Im zweidimensionalen Falle konzentriert sich im allgemeinen die Verteilung neben den stabilen Strudeln, Knoten oder stabilen Grenzzyklen, Separatrizen und Satteln der Differentialgleichungen (1).

A. Kolmogoroff (Moskau).

Venkatachala Iyengar, K.: On the validity of the Raman-Banerjee analysis of the pianoforte hammer problem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 1, 60—66 (1934).

If $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots$ are the roots of the equation $\mu \cot \lambda a + \mu \cot \lambda b = m \lambda$ arranged in ascending order of magnitude it is easily seen that if k is a suitably chosen positive constant we have the inequalities $\lambda_r < k r$, $2 \mu \cot(\lambda_r a) > m \lambda_r$, $2 \mu \cot(\lambda_r b) > m \lambda_r$. It is readily seen, then, that the series of Raman and Banerjee for the displacement ρ_0 and its time derivative converge absolutely and uniformly for all finite values of t . In order to be able to discuss the convergence of the series for the second derivative $\frac{d^2 \rho_0}{dt^2}$ the author proves the following lemma: Let θ be an irrational number,

n a positive integer, $\{n\theta\}$ the fractional part of $n\theta$, $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r, \dots$ the sequence of increasing positive integers which satisfy the inequality $\{n\theta\} \sqrt{n} < k$ where k is any constant, then $n_r > \alpha r^{3/2}$ where α is a constant depending on k . The proof depends on a set of inequalities connected with the continued fraction for θ . — The convergence of the series for the second derivative is then established and discontinuities are found to occur at the points $2a/c, 4a/c, 6a/c, \dots$ and $2b/c, 4b/c, 6b/c, \dots$. — The Gibbs' phenomenon occurs at these points but difficulties thus encountered can be overcome by the artifice of Raman and Banerjee. It is concluded that the analysis of these authors is entirely correct and is more readily generalised than the functional method of Kar.

H. Bateman (Pasadena).

Dubreil-Jacotin, M.-L.: Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'amplitude finie. J. Math. pures appl., IX. s. 13, 217—291 (1934).

A study is made of the two dimensional motion of a heavy liquid in a rectilinear canal of finite depth with horizontal bottom. The stream-function Ψ is in this case a solution of the partial differential equation $\Delta \Psi = f(\Psi)$ where f is a function to be determined. At the free surface l , which is a particular stream-line, the pressure is to be constant so that $2gy$ differs by a constant from the square of the gradient of Ψ at all points of l . — In the pioneer work of Levi Civita it was supposed that no appreciable transport of matter occurs in the deep layers of the liquid. The author drops this assumption which would rule out the waves of Gerstner which in Lagrangian co-ordinates are represented by

$$kx = ka + e^{-kb} \sin k(a + ct), \quad ky = kb + e^{-kb} \cos k(a + ct), \quad kc^2 = g.$$

With the new variables $X = x + ct$, $Y = y$ the lines of flow are represented by $b = \text{constant}$ where b varies from the value l_0 for the free surface to an infinite value. The axis of X is then shifted parallel to itself so that the origin is on the free surface. It is then found that the vorticity is of the second order in comparison with the height of the wave. If $\Psi \rightarrow \infty$ the vorticity tends to zero like $\exp[-4\pi\Psi/\lambda c]$ where λ is the wave length given by the usual formula $2\pi c^2 = \lambda g$. If $v = \exp(-kb_0)$ is, except for quantities of the second order, the height of a wave above the mean level $\Delta \Psi = v^2 f(\Psi) \exp[-4\pi\Psi/\lambda c]$ where $f(\Psi)$ is bounded and continuous in the Hölder sense. It is then shown that there is a transportation of matter in the deep layers, in other words that

$$dy \int_{t_1}^{t_2} v e^{-k\beta} \cos(k\alpha) dt$$

does not remain finite when $t_2 - t_1 \rightarrow \infty$. α and β being defined by the equations $kX = k\alpha + v e^{-k\beta} \sin k\alpha$, $kY = k\beta + v e^{-k\beta} \cos k\alpha - v$. Use is next made of a

transformation in which the stream-function Ψ is given implicitly by an equation of type $Y = \Phi(\Psi, X)$ and new variables $\alpha = 2\pi X$, $\varrho = \exp(-2\pi A\Psi/\lambda)$ are introduced, A being a constant which is equal to $\frac{1}{c}$ to a first approximation. This transformation makes a strip $0 \leq \Psi \leq q$ correspond to an annulus. — In ch. II a treatment is given of the case of infinite depth; the problem is reduced to an analytical problem relating to a function V harmonic in a unit circle and related to another function ω which, like V , is to be found from two equations involving integrals and derivatives. Use is made of the method of successive approximations and of Hölder conditions. — Ch. III deals with the case of finite depth. The analysis depends again on the use of integro-differential equations. A number of definite integrals are evaluated in the course of the work. In particular it is found that if $\Phi = t - \sigma$, $\alpha = t - s$

$$\int_0^{2\pi} \log[R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha] \frac{r - R \cos \alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha} d\alpha = \frac{2\pi}{r} \log \frac{R^2}{\sqrt{R^4 - 2R^2 r^2 \cos \beta + r^4}}$$

where $\beta = \sigma - s$.

H. Bateman (Pasadena).

Orlow, M.: Über ein Problem von Liapounoff. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 63—64 (1934).

Verf. untersucht die in der Nachbarschaft der Liapounoffschen kritischen dreiachsigen Ellipsoide 6. Ordnung liegenden Gleichgewichtsfiguren, die keine Ellipsoide sind, und zeigt, daß für einen festen Wert der Winkelgeschwindigkeit nur eine solche Figur existieren kann. Er stützt sich dabei wesentlich auf eine frühere, von ihm in ukrainischer Sprache veröffentlichte Abhandlung (Kiev, Bull. Ac. Sc. 1928, 3, 45—47; Jb. Fortschr. Math. 1928, 1035).

Maruhn (Leipzig).

Quantentheorie.

Bavink, B.: Die Bedeutung der neuen Physik für das Grundproblem der Biologie. Scientia 57, 28—36 (1935).

Das charakteristische Auftreten hochkomplizierter Moleküle im Organismus läßt den Verf. vermuten, daß hier eine Grenze der Anwendbarkeit der gewöhnlichen physikalischen Vorstellungsweisen besteht. Anschließend Spekulationen über eine „Ge-staltmathematik“ als Darstellungsmittel biologischer Gesetzlichkeit. P. Jordan.

Goldstein, L.: Sur les champs électromagnétiques de la théorie des quanta. I. J. Physique Radium, VII. s. 5, 545—552 (1934).

Mit Hilfe der Schrödingerschen Dichte und Stromdichte werden Ausdrücke für die elektro- und magnetostatischen Felder von wasserstoffähnlichen Atomen aufgestellt und diskutiert.

O. Klein (Stockholm).

Robertson, H. P.: An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation. Physic. Rev., II. s. 46, 794—801 (1934).

Mittels einer quantenmechanischen Überlegung wird eine verallgemeinerte Unbestimmtheitsrelation für die gleichzeitige Messung einer geraden Anzahl von Observablen abgeleitet und gezeigt, wie sich dieselbe mit Hilfe der über ein passendes Gebiet des Phasenraums erstreckten Integralinvarianten veranschaulichen läßt.

O. Klein (Stockholm).

Podolsky, Boris: An interpretation of e^2/mc^2 and h/mc . Physic. Rev., II. s. 46, 734—738 (1934).

Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß eine widerspruchsfreie annähernde Theorie von Photonen und Elektronen möglich sei, in der nur die Feinstrukturkonstante festgelegt ist, während das Verhältnis der Elektronenmasse zur Protonenmasse sowie das Verhältnis der Gravitationskräfte eines Elektrons zu seinen elektrostatischen Kräften vernachlässigt wird.

O. Klein (Stockholm).

Elsasser, Walter M.: Constitution des particules élémentaires et forces nucléaires. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1213—1215 (1934).

Verf. schlägt vor, die Eigenschaften der nichtcoulombschen Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen in enger Analogie zur magnetischen Wechselwirkung ihrer Spinnmomente anzusetzen.

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

Elsasser, Walter M.: Forces et liaisons nucléaires. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1406—1408 (1934).

Betrachtungen über die Bedeutung der vom Verf. (vgl. vorst. Referat) eingeführten, von der gegenseitigen Orientierung der magnetischen Momente abhängigen Wechselwirkungskräfte für die Kernsystematik.

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

Walke, Harold J.: Radioactivity and nuclear synthesis. Philos. Mag., VII. s. 18, 795—822 (1934).

Es werden die Prozesse betrachtet, die zum Aufbau der höheren Elemente aus einer ursprünglich bloß aus Neutronen bestehenden Sternmaterie führen könnten.

C. F. v. Weizsäcker (Leipzig).

Tamm, Ig.: Interaction of neutrons and protons. Nature 134, 1010—1011 (1934).

Breit, G., and F. L. Yost: Capture of charged particles by nuclei due to emission of gamma-radiation. Physic. Rev., II. s. 46, 1110—1111 (1934).

Richtmyer, F. K., S. W. Barnes and E. Ramberg: The widths of the *L*-series lines and of the energy levels of Au (79). Physic. Rev., II. s. 46, 843—860 (1934).

Aus der Form der Absorptionskanten des Röntgenabsorptionsspektrums läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen die mittlere Lebensdauer desjenigen angeregten Atomzustands ablesen, der durch den Absorptionsprozeß entstanden ist. Das Absorptionsspektrum ist nämlich eine Superposition der durch den Übergang eines Elektrons aus einer bestimmten inneren Schale ins Kontinuum entstehenden Spektrallinien. Die Unschärfe der Absorptionskante gibt direkt die Breite des angeregten Zustandes an. — Diese Breite wird verglichen mit der Breite der von diesem angeregten Zustand ausgehenden Emissionslinien, und es wurden die Messungen in Übereinstimmung mit der Quantentheorie der Linienbreite gefunden, nach welchen die Breite einer Linie die Summe der Breiten des Anfangs- und Endzustandes ist.

V. Weisskopf (Zürich).

Kuhn, H., and F. London: Limitation of the potential theory of the broadening of spectral lines. Philos. Mag., VII. s. 18, 983—987 (1934).

Es wird untersucht, in welchen Grenzen man die Verbreiterung einer Spektrallinie durch die Nachbaratome in der Weise berechnen kann, daß man von der Bewegung der Atome absieht und nur die Beeinflussungen der Atomfrequenzen durch ruhende Nachbaratome berücksichtigt, über deren Lage statistisch gemittelt wird. Die durch die Atombewegung hervorgerufene Änderung der so ermittelten Linienform wird berechnet.

V. Weisskopf (Zürich).

Kuhn, H.: Pressure shift and broadening of spectral lines. Philos. Mag., VII. s. 18, 987—1003 (1934).

Es wird gezeigt, daß man bei der Berechnung der Linienverschiebung einer durch ein Fremdgas verbreiterten Spektrallinie und bei der Berechnung der Intensität weit ab von der Linienmitte von der Bewegung der Nachbaratome absehen kann und nur ihre statische Beeinflussung durch eines der Nachbaratome zu berücksichtigen braucht. Die Beziehung zwischen dieser Intensitätsverteilung und der Polarisationsanziehung der Atome wird untersucht und eine Korrektur der Lorentzschen Stoßdämpfungsbreite für hohe Drucke gegeben, was zu neuen Werten der optischen Radien führt.

V. Weisskopf (Zürich).

Bethe, H. A.: The influence of screening on the creation and stopping of electrons. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 524—539 (1934).

Im Anschluß an eine Arbeit von Bethe und Heitler (dies. Zbl. 9, 336) wird der gesamte Wirkungsquerschnitt von Atomen unter Berücksichtigung der Abschirmung

gegenüber von Prozessen berechnet, die in der Anwendung eines harten γ -Strahlquants von seiten eines schnellen Elektrons bzw. in der Bildung eines Paares von positiven und negativen Elektronen unter Aufnahme eines solchen Quants bestehen. Mit wachsender Energie des primären Teilchens nähert sich dieser Wirkungsquerschnitt gleichmäßig einem asymptotischen Höchstwert.

O. Klein (Stockholm).

Hellmann, H., und W. Jost: Zum Verständnis der „chemischen Kräfte“ nach der Quantenmechanik. Z. Elektrochem. 40, 806—814 (1934).

Das Ziel der Arbeit ist die Klärung des Valenzbegriffes, die auf Grund der quantenmechanischen Theorie des Atombaues möglich geworden war, für den Chemiker verständlich zu machen. Eine Kenntnis der Quantenmechanik wird nicht vorausgesetzt. Es wird vielmehr so viel, wie für das qualitative Verständnis der chemischen Bindung wesentlich ist, in Form von Postulaten eingeführt. Im Mittelpunkt der Betrachtung steht das Pauliprinzip. Es ist den Autoren gelungen, auf Grund eines kleinen aber klar formulierten Ausschnittes aus der Quantenmechanik die quantentheoretische Erklärung der Valenz in ihren Grundzügen richtig darzustellen.

E. Teller.

Shortley, George H.: The calculation of relative multiplet strengths in a transition array. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 20, 591—593 (1934).

Kurze Note über die Berechnung der relativen Intensitäten von Multipletts in Atomspektren zwischen den aus einer gegebenen Anfangs- und Endkonfiguration der Elektronen entspringenden Multiplettzuständen.

Gombás, Paul, und Th. Neugebauer: Berechnung der Konstanten des HCl-Moleküls. Z. Physik 92, 375—384 (1934).

Untersuchung des HCl-Moleküls nach der Wellenmechanik mit Hilfe eines Störungsverfahrens. Als Ausgangspunkt dient ein Cl⁻-Ion, dessen negative Ladungswolke der Berechnungen von Hartree entnommen wird, und ein H-Kern, der in jene Ladungswolke eindringt. Die Kräfte auf den H-Kern setzen sich dann zusammen aus der Abstoßung, die er vom Cl-Kern wegen der unvollständigen Abschirmung beim Eindringen erfährt und aus einer Anziehung zufolge der Verzerrung der Elektronenwolke des Cl⁻-Ions. Der erste Teil kann ohne weiteres angegeben werden, zur Berechnung des zweiten Teils werden einige vereinfachende Annahmen gemacht. Gleichgewichtskernabstand, Dipolmoment und Schwingungsfrequenz werden bestimmt und mit der Erfahrung verglichen.

R. de L. Kronig (Groningen).

Lenz, W.: Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen. Z. Physik 92, 631—639 (1934).

Das optische Problem der Reflexion von ebenen Wellen an einer starren Oberfläche mit periodisch sich wiederholenden Hügeln wird behandelt. Es wird vorausgesetzt, daß die Hügel im Verhältnis zu ihrer Breite nicht hoch sind (sanft gewellte Oberfläche), ferner, daß die einfallenden Wellen eine Wellenlänge λ haben, so daß $\lambda < \frac{1}{2} d$ ist, wo d den Periodizitätsabstand auf der Oberfläche bedeutet. Für so kurze Wellen kann man einerseits versuchen, die Streuintensität nach der geometrischen Optik zu berechnen, indem man die einfallende Welle als Strahlengemeinschaft behandelt, die an den Oberflächenelementen Reflexion erleidet. Genauer aber ist es, die Wirkungen der Oberflächenelemente nach dem Huyghensschen Prinzip zu superponieren.

R. de L. Kronig (Groningen).

Brandt, E.: Geometrisch-optische und wellentheoretische Methode zur Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen. Z. Physik 92, 640—660 (1934).

Die im vorigen Referat erwähnte geometrisch-optische Methode zur Berechnung der Streuintensität an einer Oberfläche mit periodischer Struktur wird mit der wellentheoretischen Methode von Rayleigh für den Spezialfall einer sinusförmig gewellten Oberfläche verglichen, da sich letztere dort streng durchführen läßt. Die geometrisch-optische Methode erweist sich dabei unter gewissen einschränkenden Bedingungen die näher erörtert werden, als sehr befriedigend.

R. de L. Kronig (Groningen).

Wigner, E.: On the interaction of electrons in metals. Physic. Rev., II. s. 46, 1002—1011 (1934).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [E. Wigner und F. Seitz, Physic. Rev. 46, 509 (1934); dies. Zbl. 10, 42] wird die elektrostatische Wechselwirkung („correlation energy“) zwischen den Metallelektronen genauer berechnet nach einer schon l. c. angedeuteten Verallgemeinerung des Fock-Hartreeschen Verfahrens mit nachfolgender Störungsrechnung. Die numerischen Resultate werden dadurch noch verbessert. Für Na ergibt sich: Gitterkonstante ber. 4,62 Å, beob. 4,23 Å; Bindungsenergie für ber. Abst. 26,1 Cal, beob. Abst. 22,3 Cal, beob. 26,9 Cal. *Nordheim* (Haarlem).

Landau, L., and E. Lifshitz: On the production of electrons and positrons by a collision of two particles. Physik. Z. Sowjetunion 6, 244—257 (1934).

Auf Grundlage der Diracschen Theorie wird die Übergangswahrscheinlichkeit von Elektronen von einem Zustand negativer in einen Zustand positiver Energie beim Zusammenstoß von zwei schnellen Kernen, deren Wechselwirkung vernachlässigt wird, berechnet. Der Wirkungsquerschnitt für die entsprechende Bildung von Paaren positiver und negativer Elektronen wächst proportional der dritten Potenz des Logarithmus der Energie der stoßenden Kerne. *O. Klein* (Stockholm).

Klassische Optik.

Herzberger, M.: Über ein optisches Dualitätsprinzip. Naturwiss. 22, 649 (1934).

Das Dualitätsprinzip besteht darin, daß man in Gleichungen zwischen den Brunischen Größen (s. die Strahlenoptik des Verf., Berlin 1931; S. 54 ff.; dies. Zbl. 3, 88) $x, y, n\xi, n\eta$ durch $n\xi, n\eta, -x, -y$; ebenso auch $x', y', n'\xi', n'\eta'$ durch $n'\xi', n'\eta', -x', -y'$ ersetzen kann. So kann man aus jedem Gesetz drei weitere ableiten. Herzberger verweist darauf, daß die ganze Gaußsche Optik auf einen einzigen Satz zurückzuführen ist und daß die Sonderbehandlung der unendlich fernen Ebene durch das Dualitätsprinzip überflüssig wird. Eine genauere Darstellung soll in der Z. Physik erscheinen. *Hans Boegehold* (Jena).

Herzberger, M.: Über ein Dualitätsprinzip in der Optik. Z. Physik 91, 323—328 (1934).

Die Arbeit ist eine weitere Ausführung des Aufsatzes in Naturwiss. 22, 649 (vgl. vorst. Referat). Das Dualitätsprinzip wird ausgesprochen und auf zwei Fälle angewandt. Aus den Newtonschen Gleichungen über die Abbildung werden Gesetze über die von Gullstrand als optische Projektion bezeichnete Zuordnung abgeleitet. (In Gleichung 3 auf S. 324 fehlt wohl ein negatives Vorzeichen, ebenso in den letzten Gleichungen I, II, III, 7 auf S. 325—326.) An die Stelle der Brennweiten treten Größen, die als dingsseitige Entfernung der Bildkoordinatenebene vom Ding sprung und entsprechend bezeichnet werden. — Ferner wird die Unveränderlichkeit des Abbildungsmaßstabes im brennpunktlosen System auf einen selbstverständlichen Satz zurückgeführt. Der Verf. bemerkt dann, daß sich die Anwendbarkeit des Prinzips nicht auf die Gaußsche Optik beschränkt. — Der Beweis des Dualitätsprinzips, der dann erbracht wird, beruht auf der Ersetzung des Streckeneikonals durch das gemischte Eikonale; es handelt sich um einen Sonderfall der Legendreschen Transformation. Herzberger schließt mit einigen Bemerkungen über die Anwendung auf die Optik anisotroper Mittel. *H. Boegehold*.

Piecht, Johannes: Das Huygenssche Prinzip in Anwendung auf Zylinderwellen. Z. Physik 91, 717—723 (1934).

Nach dem Huygensschen Prinzip setzt sich bekanntlich die Lichterregung aus elementaren Kugelwellen zusammen. Verf. zeigt nun, daß man das Huygenssche Prinzip — in modifizierter Form — auch auf Zylinderwellen anwenden kann, d. h. daß es gestattet ist, die zylindrische Wellenfläche in zur Zylinderachse parallele Streifen von differentieller Breite zerlegt zu denken und diese Streifen als lineare Lichtquellen aufzufassen, die ihrerseits elementare Zylinderwellen aussenden.

V. Fock (Leningrad).

Philippoff, W.: Untersuchungen über Spaltabbildungen. II. Mitt. Z. Instrumentenkde 54, 393—396 (1934).

I. vgl. dies. Zbl. 9, 280.

Szule, Mikolaj: Théorie de la réfraction dans un prisme hors de la section principale. Acta Physica Polon. 3, 115—121 (1934).

Der Verf. behandelt die Brechung eines Lichtstrahles durch ein Prisma unter der Voraussetzung, daß der Lichtstrahl außerhalb des „Hauptschnittes“ des Prismas verläuft, die durch Lichtstrahl und Normale der ersten Prismenfläche bestimmte Einfallsebene also mit der durch die beiden Flächennormalen bestimmten Ebene des Hauptschnittes einen von Null verschiedenen Winkel bildet. Die Behandlung geschieht mit Benutzung der sphärischen Trigonometrie, wobei das Prisma im Mittelpunkt einer Kugel angenommen wird, durch den gleichzeitig die Lichtstrahlen hindurchgehen. Bei der Behandlung wird der Allgemeingültigkeit wegen angenommen, daß die beiderseits an das Prisma angrenzenden Medien untereinander verschieden sind. Für den spezielleren Fall, daß jene beiden Medien gleich sind, erhält der Verf. als Resultat: Das Produkt aus dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des zugehörigen Azimuts ist gleich dem Produkt aus dem Sinus des Austrittswinkels und dem Sinus des zugehörigen Azimuts, unabhängig vom brechenden Winkel des Prismas. — Der Verf. behandelt dann den Strahlengang bei mehrfachen Reflexionen im Prisma, wieder unter der Voraussetzung eines beliebigen Winkels zwischen Einfallsebene und Prismenhauptschnitt, und wendet die erhaltenen Formeln auf verschiedene Spezialfälle an.

Picht (Berlin).

Rožděstvenskij, D.: Anomale Dispersion in breiten Absorptionsstreifen. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 1, 35—56 u. dtsch. Zusammenfassung 57 (1934) [Russisch].

Breite Absorptionsstreifen können entweder durch Oszillatoren mit einer bestimmten Eigenfrequenz und großen Dämpfung oder durch eine Reihe von Oszillatoren mit verschiedenen Eigenfrequenzen und kleinen Dämpfungskonstanten (z. B. Molekülbanden) bedingt werden. Die Sichtbarkeit der Interferenzstreifen bei der Beobachtung der anomalen Dispersion nach der Methode von Puccianti ist in beiden Fällen verschieden. Im 1. Falle besteht, unabhängig von dem Wert der Dämpfungskonstante infolge der kleinen Sichtbarkeit der Interferenzstreifen, die durch die Absorption bedingt wird, eine Beobachtungsgrenze. Die Verschiebung $P = \frac{n-1}{\lambda} d$ im Maximum von $|n-1|$ kann nämlich etwa $\frac{1}{3}$ der Breite der Interferenzstreifen nicht übersteigen. Im 2. Fall dagegen kann bei gleicher Breite der Absorptionsstreifen die Sichtbarkeit der Dispersionskurve bis um das Dreifache größer sein. Aus der deutlichen Sichtbarkeit der Maxima der Dispersionskurve (wie es für Lösungen der Salze der seltenen Erden der Fall ist) kann man also auf die Komplexität des Absorptionsstreifens schließen. — Es werden Dispersionskurven nebst deren Sichtbarkeiten, die verschiedenen Verteilungen der „Oszillatordichte“ entsprechen, berechnet. Für den Fall der verschwindenden Dämpfung wird eine allgemeine Methode der Berechnung der Dispersionskurve aus der gemessenen Absorptionskurve gegeben und für die Deutung der Dispersionskurven für Farbstofflösungen und Uranphosphatglas angewandt.

M. Leontowitsch (Moskau).

Matossi, Frank: Über die Rayleighsche Streustrahlung in Kristallen. Z. Physik 92, 425—461 (1934).

Die Theorie der molekularen Rayleighschen Streustrahlung in Kristallen wird für rhombische, trigonale, hexagonale und tetragonale Kristalle durchgeführt. Dadurch wird die früher von M. Leontowitsch und S. Mandelstam jun. [Sow. Phys. 1, 317 (1932); dies. Zbl. 4, 430] gegebene Theorie auf diese Fälle erweitert, in besonderem wird der Depolarisationsgrad der Streustrahlung berechnet. Da die Erscheinung auch durch die elastischen Konstanten des Kristalls bestimmt wird, so ist die Streuung für einige optisch einachsige (z. B. trigonale) Kristalle durch die Orientierung der kristallographischen und nicht allein durch die Orientierung der optischen Achsen bestimmt. Für reguläre Kristalle stimmen die Ergebnisse der Berechnungen vom Verf. mit denen der erwähnten Autoren überein. Verf. zeigt aber, daß die in der zitierten Arbeit angegebene Formel für Quarz infolge eines Rechenfehlers unrichtig ist. — Experimentell hat Verf. den Depolarisationsgrad in Glas, Steinsalz, Topas, Kalkspat und Quarz zu messen versucht. Nur für Quarz, für den durch Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Intensität nachgewiesen war, daß eine Streuung im wesentlichen molekular ist, ist eine annähernde Übereinstimmung mit der Theorie gefunden. Im Anhang werden die Ergebnisse der Messung der Polarisation der Ramanstreuung in Kalkspat angegeben. Für die 9μ -Linie bleibt noch

eine Diskrepanz zwischen diesen Ergebnissen und den Ergebnissen von Cabannes u. a. [C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 156, 289 (1931)]. Für die 14μ -Linie besteht eine Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Cabannes. *M. Leontowitsch* (Moskau).

Seemann, H.: Bedingungen und Grenzen der korrekten Abbildbarkeit mittels Elektronenprojektion. Elektronenbahnen im elektrischen Zylinderfelde eines kristallinischen rauhen Glühdrahtes. Z. Physik **92**, 253—273 (1934).

Der Verf. weist zunächst — unter Bezugnahme auf eine eigene frühere Arbeit [Z. Physik **79**, 742—752 (1932); Erg. techn. Röntgenkde **3**, 80—97 (1933)] — darauf hin, daß sich von einem glühenden, Elektronen emittierenden Draht elektronenoptisch unter Benutzung elektrischer Linsen kein einwandfreies Abbild erzielen läßt, da die an der Drahtoberfläche stets vorhandenen und unvermeidlichen Furchen und Kristallkanten eine starke Feldverzerrung und dadurch eine unkontrollierbare Ablenkung der dort emittierten Elektronenstrahlen bedingen und da die Strahlung nicht — wie dies der Fall ist — nach dem Lambertschen Gesetz strahlen darf, sondern diffus sein muß. Bei Abbildung durch magnetische Felder seien diese Fehler weniger zu befürchten. — Anschließend hieran bringt der Verf. mathematische Betrachtungen betreffend die Bestimmung und graphische Konstruktion der Bahn eines Elektrons in einem beliebig gegebenen Potentialfeld. Das vom Verf. entwickelte Verfahren beruht darauf, die für ein einfach gegebenes, etwa lineares Potentialfeld berechenbare und graphisch dargestellte Bahn des Elektrons auf ein anderes weniger einfaches vorgegebenes Potentialfeld dadurch zu übertragen, daß man die Potentialfelder (mathematisch) aufeinander abbildet und dadurch auch eine (mathematische) Abbildung der Bahnkurve erhält. — Den Schluß der Arbeit bildet eine kurze Besprechung der vom Verf. konstruierten und zu seinen elektronenoptischen Untersuchungen benutzten Apparatur. *Picht* (Berlin).

Bedford, L. H.: A note on Davisson's electron-lens formulae. Proc. Physic. Soc., London **46**, 882—888 (1934).

Für die von verschiedenen Verfassern, unter anderem auch von Davisson angegebene Formel für die Brennweite einer kleinen (geradlinigen oder kreisförmigen) Öffnung in einer leitenden Platte, auf deren einer Seite das Potential E' und auf deren anderer Seite das Potential E'' herrscht, für durch diese Öffnung hindurchgehende Elektronenstrahlen: $f = kV(E'' - E')^{-1}$ [wo noch V die Voltgeschwindigkeit der in die Öffnung eintretenden Elektronen ist und k eine Konstante ist, die im zweidimensionalen Fall (schmaler Spalt) den Wert 2, im dreidimensionalen Fall (kreisförmige Öffnung) den Wert 4 hat] gibt der Verf. eine Ableitung. Hierbei macht er von vielen (praktisch erlaubten) Vernachlässigungen Gebrauch. Anschließend überträgt er die Ergebnisse auf die Ableitung der Brennweitenformel für eine Elektronenlinse, die aus zwei parallelen in größerem Abstände einander gegenüberstehenden durchbohrten Platten besteht, zwischen denen — vor der Durchbohrung — das konstante Potential E'' bestand. *Picht* (Berlin).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Njegovan, V.: Über innere Thermodynamik. (II. Mitt.) Acta Physica Polon. **3**, 213—214 (1934).

Kurze zusätzliche Bemerkungen zu der früher referierten I. Mitteilung gleichen Titels (dies. Zbl. **9**, 283). *H. Ulich* (Aachen).

Grammel, R.: Graphische Mittelwertsbildungen in der Thermodynamik. Ing.-Arch. **5**, 477—480 (1934).

Zunächst wird eine Zusammenstellung von Beispielen für das Auftreten verallgemeinerter arithmetischer und harmonischer Mittelwerte in der Thermodynamik gegeben. Im Anschluß an Massau zeichnet Grammel z. B. $\sum k_i x_i / \sum k_i$ mit Hilfe desjenigen Streckenzuges im k, x -System, der über der Spanne k_i jeweils die Steigung $x_i / \sum k_i$ hat (graphische Integration einer stückweise konstanten Funktion). Die bei

Berechnung von harmonischen Mitteln auftretende Reziprokenbildung wird durch Zeichnen von Loten ersetzt. Das Verfahren läßt sich noch bequem auf den Fall verallgemeinern, daß die Gewichte k_i selbst Produkte oder Quotienten sind.

Theodor Zech (Darmstadt).

Becker, R.: Bemerkungen zu der Arbeit von G. Schweikert: „Zur Theorie der Zustandsgleichung. I.“ Z. Physik **92**, 680—682 (1934).

Die an der Schweikertschen Theorie geübte Kritik gipfelt in dem Satze, daß diese „sich größtenteils nur durch eine Reihe von groben und elementaren Fehlern von der bisher gültigen unterscheidet und daß sie den wirklichen Verhältnissen viel weniger als die bisherige Theorie gerecht wird“. Hierfür werden zahlreiche Belege angeführt (vgl. dies. Zbl. **9**, 424).

H. Ulich (Aachen).

Schweikert, G.: Erwiderungen auf die Bemerkungen von R. Becker zu meiner Arbeit „Zur Theorie der Zustandsgleichung. I.“ Z. Physik **92**, 683—688 (1934).

Verf. sucht zu beweisen, „daß die Kritik Beckers völlig verfehlt ist“.

H. Ulich (Aachen).

Becker, R.: Bemerkung zur vorstehenden Erwiderung. Z. Physik **92**, 689 (1934).

Schweikert, G.: Bemerkung zur vorstehenden Erwiderung. Z. Physik **92**, 689 (1934).

Schouls, Georgette: Application de la mécanique statistique générale au calcul de l'entropie des gaz à molécules rigides. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **20**, 1014—1022 (1934).

Ornstein, L. S., and W. R. van Wijk: On the derivation of distribution functions in problems of Brownian motion. Physica **1**, 966 (1934).

Druckfehlerberichtigung zu einer früheren Arbeit Physica **1**, 235 (1934) (dies. Zbl. **8**, 426).

Fürth (Prag).

Perrin, Francis: Mouvement brownien d'un ellipsoïde. I. Dispersion diélectrique pour des molécules ellipsoïdales. J. Physique Radium, VII. s. **5**, 497—511 (1934).

L'auteur donne une extension de la théorie du mouvement brownien de translation et de rotation d'une particule ellipsoïdale. — En appliquant la méthode de Langevin-Einstein il obtient pour les valeurs moyennes quadratiques des petits déplacements $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ et rotations $\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma$ suivant les axes de l'ellipsoïde:

$$\overline{\Delta x^2} = 2 \frac{kT}{f_1} \Delta t; \quad \overline{\Delta x \Delta y} = 0; \quad \dots \quad \overline{\Delta \alpha^2} = 2 \frac{kT}{C_1} \Delta t; \quad \overline{\Delta \alpha \Delta \beta} = 0; \quad \dots,$$

f_1, f_2, f_3 sont les coefficients de frottement de translations, C_1, C_2, C_3 ceux de rotations. Dans la démonstration de ces formules les termes du second degré dans les équations du mouvement sont négligés. — Les rotations de l'ellipsoïde pendant une durée de temps finie sont indépendantes de sa translation; on peut les étudier séparément. Le problème des rotations browniennes, si l'on ne considère que les positions (et non les vitesses) des particules conduit à l'équation de Fokker:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^q} \sqrt{g} \left(D^{e\sigma} \frac{\partial U}{\partial x^\sigma} - v^e U \right) \quad (1)$$

pour la densité U de la probabilité où $x^\sigma (x^1, x^2, x^3)$ sont des coordonnées quelconques, déterminant la position de l'ellipsoïde (par exemple les angle d'Euler), $\sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$ est l'élément d'extention, $D^{e\sigma}$ sont les composantes du tenseur de diffusion rotatoire, ses valeurs principales suivant les axes de l'ellipsoïde sont: $D_i = \frac{1}{4} \frac{kT}{C_i}$, v^e sont les composantes de la vitesse de rotations dues aux couples des forces extérieures. — Les formules générales sont appliquées à la théorie de la dispersion électrique d'un liquide polaire en haute fréquence. Dans ce cas la vitesse v^e est due au champ électrique $\hbar_0 e^{i\omega t}$. En développant U suivant les puissances du champ électrique l'auteur donne une solution de l'équation (1), qui conduit à l'expression suivante pour le moment

électrique moyen dirigé suivant le champ

$$\bar{m} = \frac{\hbar_0 e^{i\omega t}}{3kT} \sum_{i=1}^3 \frac{m_i^2}{1 + i\omega\tau_i},$$

m_i sont les composantes du moment électrique permanent suivant les axes de l'ellipsoïde, τ_i les temps de relaxation déterminés par:

$$\tau_1 = \frac{1}{kT} \cdot \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}, \text{ etc.}$$

Il résulte que le temps de relaxation pour un ellipsoïde de révolution allongé, s'écarte peu si le moment est perpendiculaire à l'axe de révolution de la valeur relative à une sphère de même volume, même quand l'allongement de l'ellipsoïde devient considérable. Cela explique l'accord pour certains monoalcools (leur molécules peuvent être très allongées) entre les mesures de dispersion diélectrique et la formule de Debye qui suppose les molécules sphériques; il suffit d'admettre que leur moment électrique est perpendiculaire à leur longueur.

Leontowitsch (Moskau).

Krutkow, G.: Über die linearen Probleme der Theorie der Brownschen Bewegung. III. C. R. Acad. Sci. URSS 4, 120—122 u. dtsch. Text 122—124 (1934) [Russisch].

Ce travail contient quelques compléments de deux notes précédentes (C. R. Acad. Sci. URSS 3, 215, 479; ce Zbl. 9, 426). L'auteur donne les formules relatives au cas général où une force quelconque, fonction de temps, agit sur les particules mobiles. Il retrouve la formule de von Smoluchowski relative à la distribution des particules attirées par une force proportionnelle à la distance de la particule d'un point fixe. Dans quelques cas une différence a lieu entre la manière dont le système s'approche de l'état stationnaire avec frottement ou sans frottement. S'il y a du frottement, la distribution des positions devient stationnaire en même temps avec celle des vitesses; s'il n'y a pas de frottement, les vitesses initiales s'évanouissent d'abord; à cette époque les vitesses sont distribuées suivant la loi de Maxwell; les positions changent ensuite et s'approchent de l'état stationnaire où la distribution des positions est uniforme.

B. Hostinský (Brno).

Titow, A.: Über die von einem durchsichtigen begrenzten Körper ausgestrahlte Energie. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 1, 59—72 u. dtsch. Zusammenfassung 73 (1934) [Russisch].

Zweck der Arbeit ist die Einführung von geometrischen Elementen in das Kirchhoffsche Gesetz in expliziter und allgemeiner Form. §1 enthält allgemeine Betrachtungen; §2 gibt Beziehungen zwischen den optischen Größen, die den Körper in einem Punkte seiner Oberfläche charakterisieren; in §3 wird der allgemeine Fall eines begrenzten durchsichtigen isotropen Körpers behandelt; §4 und §5 enthalten Anwendungen: die Ausstrahlung einer durchsichtigen Kugel (Wassertropfen) und einer planparallelen Platte.

V. Fock (Leningrad).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Bemmelen, R. W. van, und H. P. Berlage jun.: Versuch einer mathematischen Behandlung geotektonischer Bewegungen unter besonderer Berücksichtigung der Undationstheorie. Gerlands Beitr. Geophys. 43, 19—55 (1934).

Nach der Undationstheorie ist jede Hebung infolge subkrustalen Wegfließens von Materie in den Nachbargebieten von einer Senkung begleitet. Diese Senkung regt die Differentiation des Stamm-Magmas im Untergrund an, worauf eine Hebung durch Aufpressung salischer Differentiationsprodukte folgt. Über der oberen Grenze der Eklogitschale als dem isostatischen Basisniveau liegt demnach im vorgerückten Stadium zwischen Sal und Sima eine Zwischenschicht salsimatischer Urschmelze, so daß wir für die Vertikalbewegungen der Erdkruste drei Grenzflächen zu unterscheiden

haben. Es wird ein System einfacher linearer Differentialgleichungen angesetzt, das die Kontinuitätsbedingung erfüllt und die Vertikalbewegungen infolge reinen Fließens des Gesteins gut darstellt, hingegen für die Magmadifferentiation versagt. Jedoch gestattet auch die Beschränkung auf die reinen Fließbewegungen auf Grund der beobachteten Bewegungsvorgänge an der sichtbaren Erdoberfläche einen Rückschluß auf die Struktur der tieferen Erdschichten. Die Differentialgleichungen werden für mehrere einfache, aber systematisch wichtige Fälle gelöst und unter idealisierten Annahmen auf die Hebung des fennoskandischen Schildes angewendet. Es handelt sich dabei um eine Wiederherstellung gestörten Gleichgewichtes nach der Eisentlastung. Für den Viskositätskoeffizienten der Erdkruste erhält man denselben Wert wie auf Grund der Polbewegung. Mit der Annahme, daß die Geschwindigkeit der Magmadifferentiation eine lineare Funktion der Stärke der Salschichte ist, wird gefolgert, daß die auftretenden Oszillationen bei bloßem Streben nach isostatischem Gleichgewicht aperiodisch sein dürften und daß daher tatsächliche periodische Schwingungen nur mit einer Tendenz nach hydrostatischem Gleichgewicht vereinbar sind. *Ledersteger.*

Mader, Karl: Die Tiefenbestimmung plattenförmiger horizontal liegender Einschlüsse aus Ergebnissen von Drehwaagenmessungen. Gerlands Beitr. Geophys. 43, 156—184 (1934).

Die Arbeit behandelt folgende plattenförmige Einlagerungen: 1. die zweifach unendliche horizontale Platte; 2. die einfach unendliche horizontale Platte; 3. die endliche horizontale rechteckige Platte; 4. die horizontale Kreisscheibe; 5. die zweifach unendliche schiefe Platte; 6. die einfach unendliche schiefe Platte; 7. die endliche geneigte viereckige Platte; 8. den unendlichen horizontal liegenden Keil; 9. den endlichen horizontal liegenden Keil. Für alle diese Gebilde werden die (zum Teil schon bekannten, zum Teil neu berechneten) Gradienten und Krümmungsgrößen formelmäßig angegeben. Zu den meisten dieser Körper werden auch noch graphische Darstellungen und nähere Diskussionen für die praktische Anwendung gegeben. Es zeigt sich, daß man bei der Ermittlung der Tiefe angenähert horizontal liegender Einlagerungen im allgemeinen unter Benutzung der für die zweifach unendliche Platte geltenden Formeln zu praktisch brauchbaren Ergebnissen kommt. *Schlomka (Greifswald).*

Pekeris, Chaim L.: An inverse boundary value problem in seismology. Physics 5, 307—316 (1934).

In this paper the interpretation problem of seismology for a flat earth is solved upon the basis of the utilization of the complete observable surface motions, rather than upon the customary basis of the travel times for a few particular phases of the motion. It is found that the inclusion of the complete motion permits the separate determination of the variation with depth of the density, and of Lamé's constants λ and μ , instead of merely the combination of these quantities which express the wave velocities. The problem is treated in two parts (1) for the case of a symmetrical non-dilatational source, and (2) for a symmetrical dilatational source. After reducing the equations of elastic motion for the heterogeneous medium to a system of equivalent ordinary differential equations, it is seen (part 2) that the elastic functions occur only in the coefficients of a pair of simultaneous second order ordinary differential equations in z , whereas the solutions in r are of Bessel type, $J_0(kr)$. The boundary conditions on the surface stresses and the observed values of the displacements at the free surface determine, in effect, three initial conditions (at $z = 0$) upon the pair of simultaneous differential equations, and for all values of the parameter k , and of the frequency p . The asymptotic behavior with respect to the parameter k of the two suitable solving functions for these simultaneous equations is investigated. From the asymptotic solutions and the three initial conditions a system of relationships is developed which enables the successive determination of the coefficients of the MacLaurin series expansions of the desired elastic parameters $\mu(z)$ and $\lambda(z)$, and of the density $\rho(z)$.

L. B. Slichter (Cambridge, Mass.)

Coulomb, J., et G. Grenet: Sur la théorie des séismographes à amplification électromagnétique. C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1144—1145 (1934).

The differential equation governing the angular motion of the galvanometer of a seismograph of the Galitzin type may be put, as is well-known, in the form

$$\frac{d^4\theta}{d\tau^4} + A \frac{d^3\theta}{d\tau^3} + B \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + C \frac{d\theta}{d\tau} + \theta = \frac{d^3X}{d\tau^3},$$

where X and τ are respectively proportional to the ground movement and the time. The authors of this note point out that this equation is unchanged if the characteristics of the pendulum and the galvanometer be interchanged; thus, galvanometers of long period may provide a way out of the difficulty of constructing vertical seismographs of long period. For positive A, B, C the inequality $B > (A^2 + C^2)/AC$ constitutes a necessary and sufficient condition that an apparatus possessing these constants can actually be constructed. If the damping constants are greater than certain critical values, two other instruments (in addition to the second one already mentioned) can be constructed possessing these same constants. To every seismograph in which the reaction of the galvanometer on the pendulum is negligible (as in the standard Galitzin instrument) there corresponds an infinity of other instruments having the same constants A, B, C .

R. Stoneley (Cambridge).

Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology. Nr. 2. April, May, June, 1934. Publ. Dominion Observ. Ottawa 12, 27—43 (1934).

King, Louis V.: On the flow of electric current in semi-infinite media in which the specific resistance is a function of the depth. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 233, 327—359 (1934).

In der Geoelektrik handelt es sich bei vielen Untersuchungen um das Problem, die Potential- bzw. Stromverteilung im Untergrunde zu ermitteln, falls diesem von der Erdoberfläche Strom mittels Elektroden künstlich zugeführt wird. Der Autor behandelt den wichtigen Fall, daß die Leitfähigkeit des durch eine Ebene begrenzten unendlichen Halbraumes eine stetige Funktion der Tiefe z ist und der Strom durch eine einzige Punktelektrode zugeführt wird. Es empfiehlt sich, statt mit der Potentialfunktion V mit der Stromfunktion ψ zu arbeiten. Diese genügt bei Verwendung von Zylinderkoordinaten (r, z) der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0,$$

wenn ϱ der spezifische Widerstand des Mediums im Punkte (r, z) ist. Ist dieser im ganzen Intervall $0 < z < \infty$ endlich, so ist die Lösung dieser Gleichung

$$\psi = \int_0^\infty \Phi(\lambda) Z(\lambda, z) r \lambda K_1(r\lambda) d\lambda + C \int_0^z \frac{dz}{\varrho},$$

wobei K_1 die Besselsche Funktion mit imaginärem Argument und $Z(\lambda, z)$ eine Lösung einer Differentialgleichung vom Sturm-Liouville-Typ

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dz} \cdot \frac{dZ}{dz} + \lambda^2 z = 0$$

ist, die in der Ebene $z = 0$ verschwindet. Der Autor behandelt insbesondere die Fälle

$$\varrho = \varrho_s e^{\pm 2mz} \quad \text{für } 0 < m < \infty; \quad \varrho = \varrho_s (1 + z/a)^2 \quad \text{für } a > 0,$$

$$\varrho = \varrho_s \cdot \sec^2 ma \cdot \cos^2 m(z-a) \quad \text{für } 0 \leq a < \infty; \quad \varrho = \varrho_s (1 + z/a)^m \quad \text{für } -\infty < m < +\infty.$$

Außerdem werden die beiden Fälle behandelt, in denen eine Schicht mit stetig veränderlicher Leitfähigkeit unten durch eine völlig isolierende oder leitende Schicht begrenzt ist. Auch die allgemeine Theorie der unmittelbaren Ableitung der Potentialfunktion wird sowohl für eine Punktelektrode als auch für Linienelektroden verschiedener Form entwickelt. Für die angewandte Geophysik wichtig ist vor allem die Ermittlung der Widerstandsänderung mit der Tiefe aus den an der Erdoberfläche erhaltenen Meßgrößen, wozu der Autor den Weg weist. J. N. Hummel (Berlin).

Goubau, Georg: Zur Frage nach dem Zusammenhang zwischen den scheinbaren und wahren Reflexionshöhen in der Ionosphäre. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 44, 138—139 (1934).

The calculations described in this paper were made with the object of discovering to what extent the results of a previous paper [Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 44, 17 (1934); this Zbl. 10, 47], in which the value $\frac{1}{3}$ was assumed for the polarization term in the dispersion formula for a magnetoionic medium, are changed when the value 0 is assumed for this term. It is found that the results differ only in a small range of frequency and then only for the extraordinary ray. The difference is of no practical importance, as the absorption of this ray in the range is very heavy.

Mary Slow-Taylor (Slough).

Huxley, L. G. H.: A theory of the origin of cosmic rays. Philos. Mag., VII. s. 18, 971—983 (1934).

Es wird die Hypothese diskutiert, daß die Teilchen der Höhenstrahlung (Protonen oder Positronen) ihre Energie durch die elektrostatische Anziehung einer geladenen Erde empfangen. Die beobachtete magnetische Breitenabhängigkeit und der Ost-West-Effekt sind mit dieser Vorstellung verträglich, wenn man der Erde ein Potential von etwa $7 \cdot 10^{10}$ V (entsprechend einem Gradienten von 100 V/cm an der Erdoberfläche) zuschreibt. Auf die Schwierigkeit des Problems der Aufrechterhaltung einer so hohen Ladung wird vom Verf. selbst hingewiesen.

Nordheim (Haarlem).

Ionescu, Théodore, et Constantin Mihul: Sur la structure de la couche ionisée de l'atmosphère (ionosphère). C. R. Acad. Sci., Paris 199, 1301—1303 (1934).

Durch frühere Experimente an ionisierten Gasen hatten die Autoren festgestellt, daß die freien Elektronen eine kleinere Geschwindigkeit besitzen, als es dem Beschleunigungspotential entspricht. Daß ferner die Elektronengeschwindigkeit lediglich eine Funktion des Gasdruckes ist, daß zwischen den Elektronen und den Molekülen thermisches Gleichgewicht besteht und daß die Elektronengeschwindigkeiten gleich, also nicht nach dem Maxwell'schen Gesetz verteilt sind. Auf diesen Ergebnissen fußend, wird versucht, die Reflexion der elektromagnetischen Wellen in den höheren Atmosphärenschichten zu berechnen. Selbst wenn man hierzu annimmt, daß es nur eine einzige ionisierte Schicht mit kontinuierlicher Elektronendichte ohne Maxima und Minima in der Atmosphäre gibt, führt die Rechnung auf Maxima für die Reflexion. Unter geeigneten Annahmen decken sich die Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungen. Natürlich handelt es sich meist nur um partielle Reflexionen und nicht um totale, weshalb auch die zurückkommende Energie oft nur sehr klein ist.

Hummel (Berlin).

Eropkin, D.: On the distribution of energy in the ultra-violet solar spectrum as inferred from the photochemical theory of the ozone equilibrium in the earth's atmosphere. Philos. Mag., VII. s. 18, 838—841 (1934).

Unter der Annahme, daß das Jahresmittel des Ozongehaltes der Atmosphäre in jeder geographischen Breite konstant sei, läßt sich aus Chapmans Gleichungen [Philos. Mag. 10, 369 (1930)] eine kubische Gleichung für den Ozongehalt ν' in Zentimetern aufstellen, deren Koeffizienten aus den empirischen Daten von acht Beobachtungs-orten (Tabellen von Dobson) berechnet werden können. Diese Koeffizienten gestatten wiederum das Verhältnis σ_2/σ_3 in Abhängigkeit von der Höhe h der Ozonschicht zu berechnen, wobei σ_2 und σ_3 die Strahlungskoeffizienten der betreffenden ultraviolettten Emissionen sind. Es zeigt sich, daß σ_2/σ_3 der Planckschen Kurve des schwarzen Körpers entspricht, wenn $h = 20$ km angesetzt wird; für $h = 50$ km würde die ultraviolette Sonnenenergie etwa fünfmal größer. Die Annahme, daß die Sonne im Ultraviolett als schwarzer Körper strahlt, dürfte also mit den Resultaten von Götz, Meetham und Dobson in Übereinstimmung sein.

P. Gruner (Bern).

Pettersson, Otto: Gezeiten-Problem. III. Theorie, eine geophysikalische Studie. Ark. Mat. Astron. Fys. 24 A, Nr 16, 1—30 (1934) [Schwedisch].

Pettersson, Otto: Gezeiten-Problem. IV. Die internen parallaktischen Gezeiten, eine geophysikalische Studie. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 1, 1—11 (1934) [Schwedisch].

Geodäsie:

● **Werkmeister, Paul:** Vermessungskunde. Bd. 3. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Topographie. 3. Aufl. (Samml. Göschen Nr. 862.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1934. 144 S. u. 63 Fig. RM. 1.62.

Ulbrich, Karl: Genauigkeit der Zenitdistanzmessungen im Polygonnetz. Z. Vermessungswes. 63, 513—521 (1934).

Wedemeyer, A.: Die Gaussschen Logarithmen in der Vermessungspraxis. Z. Vermessungswes. 63, 587—588 (1934).

Gennaro, Ida: Sull'impostazione delle equazioni laterali di condizione nella compensazione delle reti trigonometriche. Atti Soc. Ligust. Sci., Genova 13, 219—236 (1934).

Um die Bildung der Seitengleichungen, welche in der Ausgleichung der geodätischen Netze auftreten, zu erleichtern, gibt die Verf. ein allgemeingültiges Kriterium, dessen Anwendung durch einige Beispiele erläutert wird. *Bossolasco.*

Killian, Karl: Ein Beitrag zur Vermessung unerforschter Hochgebirge. Allg. Vermessungswes.-Nachr. 46, 685—692 (1934).

Leemann, W.: Herleitung der Flächenformel für den sphärischen Exzeß mittels der Differentialgeometrie. Schweiz. Z. Vermessungswes. 32, 256—258 (1934).

Baillaud, Jules: Sur les erreurs de graduation des cercles employés dans les opérations géodésiques, et sur les méthodes qui permettent d'en diminuer l'influence. Bull. géodés. Nr 42, 37—68 (1934).

Bei der Reduktion exakter Horizontalwinkelmessungen müssen die Kreisteilungsfehler in Rechnung gezogen werden. Selbst bei zwanzigfacher Messung mit guten Instrumenten, die mit vier Ablesemikroskopen ausgerüstet sind, können die Teilstrichfehler in die zu messenden Winkel Unsicherheiten von mehreren $\frac{1}{10}$ Bogensekunden tragen. Insbesondere dürfte die Größe des mittleren Fehlers, der sich bei den Winkelmessungen in dem neuen Meridian von Frankreich ergeben hat, zu einem großen Teil von den Teilkreisfehlern herrühren. Im Gegensatz zu dem, was man aus der gewöhnlichen Theorie der Kreisteilungsfehler schließen könnte, ist die die Fehler (hinsichtlich der Ablesungen an zwei gegenüberliegenden Mikroskopen) darstellende Fouriersche Reihe sehr langsam konvergent. Man benötigt sehr viele Reiterationen, um den Einfluß der Fehler genügend herabzudrücken. Das Verfahren von Marth, das sonst nur bei dem Studium der Heliometer angewendet worden ist, erlaubt eine gründliche Untersuchung der Kreise, selbst wenn diese, wie in neuzeitlichen Instrumenten, nur geringen Durchmesser besitzen. *Schmehl (Potsdam).*

Bodemüller, Hellmut: Über die konforme Abbildung der Erdoberfläche mit günstigster Richtungs- und Längenreduktion für die Zwecke einer Landesvermessung. Allg. Vermessungswes.-Nachr. 46, 550—566, 569—578, 585—593 u. 601—607 (1934).

Die Güte einer konformen Abbildung eines Teils der Erdoberfläche in der Ebene ist von dem Umfange der Erfüllung der von den verschiedenen Zweigen der Landesvermessung gestellten Forderungen abhängig. Als günstigste Abbildung bezeichnet Verf. diejenige, die eine Anzahl von geforderten Eigenschaften im höchst erreichbaren Maße besitzt; vor der Wahl der Abbildung müssen die geforderten Eigenschaften in der Reihenfolge ihrer Bedeutung festgelegt sein. In der Arbeit wird ein Verfahren entwickelt, das für jeden vorgeschriebenen Bereich die günstigste Abbildung ergibt; hierdurch wird zugleich ein Vergleichsmaßstab zur Bewertung der Güte jeder anderen Abbildungsart geliefert. Zum Studium der Verzerrungen und Reduktionen genügt für die Landesvermessung die Annahme der Kugelgestalt der Erde. Um aber die Ergebnisse der Untersuchungen auf beliebig große Teile der Erdoberfläche anwenden zu können, wurde bei der Ableitung der notwendigen Formeln von der Ellipsoidgestalt

der Erde ausgegangen. — Im besonderen werden die Ergebnisse der Untersuchungen auf das Land Baden angewendet. In Baden weicht die günstigste Abbildung sehr wenig von einer schiefachsigen Zylinderprojektion ab. *Schmehl* (Potsdam).

Hopfner, F.: Die Relativität der Undulationen. *Z. Geophys.* 10, 279—288 (1934).

Die Undulationen des Geoids sind ebenso wie die Schwerkraftstörungen durch die Wahl der Funktion U im Potential $W = U + T = c$ bedingt. Nicht nur der Absolutbetrag der Restfunktion T , sondern sogar ihr Vorzeichen und damit Betrag und Sinn der Undulation in einem bestimmten Punkt des Geoids kann durch verschiedene Annahmen der Bezugsfläche $U = c$ beliebig variiert werden, wie an mehreren Beispielen nachgewiesen wird. Man kann somit aus der Schwerkraftstörung und dem Vorzeichen der Undulation keine sicheren Rückschlüsse auf die Massenordnung in der Erdkruste ziehen. Vor allem lassen die bei den Geoiden Hirvonens und Ackerls auftretenden ausgedehnten Senkungen über den Kontinenten keine isostatische Deutung zu. Da bei allen bisher entwickelten Verfahren Größen vom Quadrat der Abplattung vernachlässigt werden, sind Undulationen unter 150 m an sich problematisch.

K. Ledersteger (Wien).

Moisseiev, N.: On the determination of the deflection of plumb line for the non-regularized earth. *Russ. astron. J.* 11, 379—383 u. engl. Zusammenfassung 384 (1934) [Russisch].

Aus der Formel, welche die Erhebung ζ des Geoids über einem Normalsphäroid ergibt, läßt sich die Lotabweichung, d. h. der Winkel zwischen den Normalen zum Geoid und Normalsphäroid, ableiten. Dieses ist 1928 von Vening Meinesz für die Stokessche Formel durchgeführt worden. Dabei müssen aber die dem Geoid äußeren Massen auf irgendeine Weise entfernt werden, wodurch die bekannten „regularisierten“ Erdmodelle von Stokes, Rudzki, Helmert u. a. entstehen. Hier werden analoge Formeln aus der vom Verf. in einer anderen Arbeit (vgl. dies. Zbl. 9, 288) gegebenen Integralgleichung für ζ abgeleitet, welche keiner Entfernung der äußeren Massen bedürfen (d. h. für eine „unregularisierte“ Erde) und die Lotabweichungen in Breite und Länge ergeben.

A. Michailov (Moskau).

Hristow, Wl. K.: Über die Transformation von Mercator-Koordinaten in Gauss-Krügersche Koordinaten und umgekehrt. *Z. Vermessgswes.* 63, 465—470 (1934).

Es seien x, y die Gauss-Krügerschen Koordinaten eines Punktes und x', y' seine Koordinaten in der Mercator-Projektion. Setzt man $x' = aq$, $y' = al$, wo l die geographische Länge ist, so muß, da beide Koordinatensysteme konform sind, zwischen ihnen die Beziehung bestehen: $q + il = f(x + iy)$ und umgekehrt $x + iy = \varphi(q + il)$. Die Entwicklung von f in eine Maclaurinsche Reihe und Bestimmung deren Koeffi-

zienten für die Bedingung $l = y = 0$, für welche $q = \int_{B_0}^B \frac{dB}{N \cos \varphi}$ wird, ergibt nach Vergleichung der reellen und rein imaginären Teile die Ausdrücke:

$$q = A_1 \varrho \cos \vartheta + A_2 \varrho^2 \cos 2\vartheta + \dots$$

$$l = A_1 \varrho \sin \vartheta + A_2 \varrho^2 \sin 2\vartheta + \dots$$

mit $\varrho \cos \vartheta = x$, $\varrho \sin \vartheta = y$. Eine Umkehrung der Gleichungen ergibt die Reihen zur Berechnung der Gauss-Krügerschen Koordinaten:

$$x = B_1 P \cos \theta + B_2 P^2 \cos 2\theta + \dots$$

$$y = B_1 P \sin \theta + B_1 P^2 \sin 2\theta + \dots$$

mit $P \cos \theta = q$, $P \sin \theta = l$. Die analytischen Ausdrücke für die Koeffizienten, welche Funktionen der Breite sind, werden bis A_8 bzw. B_8 gegeben. Sämtliche A_n und B_n werden für eine Mittelbreite berechnet. Zum Schluß wird ein Zahlenbeispiel gegeben.

A. Michailov (Moskau).